VORLESUNGEN

ÜBER

THEORETISCHE PHYSIK

VON

H. VON HELMHOLTZ.

HERAUSGEGEBEN VON

ARTHUR KÖNIG, OTTO KRIGAR-MENZEL, FRANZ RICHARZ, CARL RUNGE.

BAND II.

DYNAMIK CONTINUIRLICH VERBREITETER MASSEN.

HERAUSGEGEBEN VON

OTTO KRIGAR-MENZEL.

LEIPZIG,
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1902.

DYNAMIK
CONTINUIRLICH VERBREITETER
MASSEN

VON

H. VON HELMHOLTZ.

HERAUSGEGEBEN VON

OTTO KRIGAR-MENZEL.

MIT 9 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1902.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Der vorliegende Band enthält die Bearbeitung der Vorlesungen, welche H. von Helmholtz während des Sommersemesters 1894 im physikalischen Institut der Berliner Universität gehalten hat. Als Grundlage diente eine im Auftrage angefertigte, wörtliche Nachschrift. Diese Vorlesungen nahmen bereits am 11. Juli, wegen der plötzlich eingetretenen Erkrankung, der der Meister am 8. September erlag, ein vorzeitiges Ende. Der bis dahin vorgetragene und hier wiedergegebene Stoff bildet indessen ein in sich ziemlich abgeschlossenes Lehrgebäude, dessen Hauptgegenstand die Elasticität der festen Körper ist; einige Abschnitte erstrecken sich übrigens gleichermafsen auch auf die flüssigen Aggregatzusände.

Aus dem sehr knappen Notizbuch zu diesen Vorlesungen ist zu erkennen, dafs im unmittelbaren Anschlufs an die in den letzten Paragraphen dieses Bandes gebrachte Theorie der Kugelwellen noch die, durch Integration nach der Zeit gewonnene, Erweiterung des Green'schen Satzes vorgetragen werden sollte. Da nun aber diese Betrachtungen mit allen ihren die Lösungen der Wellengleichung betreffenden Folgerungen im III. Bande dieser Sammlung (§ 49 u. ff.) und auch im V. Bande (§ 39 u. ff.) ausführlich wiedergegeben sind, so schien eine dritte Auseinandersetzung über dasselbe Thema an dieser Stelle überflüssig, zumal kein neuer mündlicher Vortrag des Meisters darüber vorlag.

Alle weiteren im Notizbuch folgenden Skizzen beziehen sich auf specielle Hydrostatik und Hydrodynamik. Sie sind oft nur durch ein Kennwort oder durch bekannte Formeln (Lagrange, Euler) angedeutet und betreffen, so weit zu erkennen, die üblichen Fragen, deren Behandlung anderweitig in Lehrbüchern etc. leicht zu finden ist. Der Verlust besteht hier wohl nur darin, dafs die eigenartigen Nebenbemerkungen und Ausblicke, welche Helmholtz in seinem improvisirten Vortrage auch bei Behandlung altbekannter Dinge einflechten und eröffnen konnte, für diesen nicht gehaltenen Theil der Vorlesungen mit ihm ins Grab gesunken sind.

Den Schlufs des Semesters sollte die Theorie der Wirbelbewegungen füllen: Alle Notizen darüber decken sich mit dem Inhalt der berühmten und heutzutage überall leicht zugänglichen Abhandlung über dieses Thema.

Berlin, Juni 1902.

Otto Krigar-Menzel.

Inhalt.

Erster Theil.

Kinematik continuirlich verbreiteter Massen. Geordnete Verrückungen.

Zweiter Theil.

Dynamik continuirlich verbreiteter Massen.

Dritter Theil.

Anwendungen auf das elastische Gleichgewicht deformirter isotroper Körper. Die Deformationen sind vorgeschrieben, die Kräfte werden gesucht.

Vierter Theil.

Gleichgewicht und Bewegungen in continuirlich verbreiteten Massen. Die Kräfte sind vorgeschrieben, die Verrückungen werden gesucht.

Erster Theil.

Kinematik continuirlich verbreiteter Massen. Geordnete Verrückungen.

§ 1. Die Vorstellung continuirlich verbreiteter Massen.

Einzelne Massenpunkte und Systeme von discreten Massenpunkten waren die Bilder, unter welchen im ersten Bande dieser Vorlesungen die Naturkörper vorgestellt wurden, an der Handhabe dieser Begriffe wurden die allgemeinen grundlegenden Principien der Dynamik entwickelt. Wir waren uns dabei bewufst, dafs jenes Bild nur eine die Betrachtungen vereinfachende Abstraction sei, deren Folgerungen in gewissen Erscheinungsgebieten die Thatsachen hinreichend vollständig und kurz darzustellen geeignet sind. Die elastischen Erscheinungen indessen, welche in diesem Bande betrachtet werden sollen, lassen sich nicht gut in ihrer ganzen Allgemeinheit aus dieser Vorstellung der Massen theoretisch entwickeln, wir wollen zu diesem Zwecke vielmehr den entgegengesetzten Grenzfall für die gedachte Constitution der Materie zu Grunde legen, dafs nämlich die Masse den von ihr eingenommenen Raum continuirlich ausfüllt. Diese Vorstellung ist ebenfalls nur eine Abstraction, ein Bild, und zwar eines, welches durchaus unseren sinnlichen Wahrnehmungen entspricht, die wir durch die Empfindungen des Tastgefühls und des Auges von den Naturkörpern zugeführt erhalten. Im Begriff der continuirlich verbreiteten Masse liegt die Anschauung, dafs man ein bestimmtes Quantum von Masse nur durch Abgrenzung eines geschlossenen Volumens herausschneiden kann, und dafs bei zunehmender Kleinheit dieses Volumens eine Proportionalität zwischen dessen Gröfse und der dadurch abgegrenzten Masse mehr und mehr erfüllt wird, deren Proportionalitätsfactor — die Raumdichtigkeit oder kurz Dichtigkeit der Masse — als fester Grenzwerth dann nicht mehr davon abhängt, bis zu welchem Grade man die Verkleinerung des Volumens treibt. Dieser Grenzwerth kann freilich an verschiedenen Stellen des mit Masse erfüllten Raumes und bei Bewegungen der continuirlichen Masse auch an derselben Stelle zu verschiedenen Zeiten verschiedene Werthe annehmen. Diese Vorstellung ist wesentlich verschieden von der früheren, welche die Körper aus discreten ausdehnungslosen Massenpunkten zusammengesetzt denkt, deren jeder eine bestimmte Massengröfse repräsentirt. Zwar so lange man Volumina abgrenzt, welche eine sehr grofse Zahl von Massenpunkten umschliefsen, kann man den Quotienten der gesammten umschlossenen Summe von Massen dividirt durch das Volumen als mittlere Dichtigkeit der Masse definiren, wenn man aber das Volumen kleiner und kleiner werden läfst, so kommt man schliefslich zu Räumen, welche nur noch wenige Massenpunkte enthalten; von einem festen Grenzwerth ist dabei keine Rede, jenes Verhältnifs wird vielmehr um so unbestimmter, je weiter man die Verkleinerung treibt.

§ 2. Verhältnifs zur Molekular-Hypothese.

Es soll nun, wie wir schon durch die Bezeichnung Abstraction oder Bild andeuteten, nicht behauptet werden, dafs die Vorstellung der continuirlich verbreiteten Massen, wegen ihrer Conformität mit der grobsinnlichen Wahrnehmung, den in der Natur vorliegenden Gebilden vollkommen entspricht. Ueber die letzte Zertheilung der Massen wissen wir überhaupt nichts erfahrungsmäfsig Bestimmtes, wir können darüber nur Hypothesen aufstellen, die uns womöglich das gesammte Verhalten der Körper, nicht nur das mechanische, sondern namentlich auch das thermische und chemische Verhalten erklären sollen, und da hat sich sowohl die ältere Naturphilosophie wie auch in bestimmterer Form die moderne Wissenschaft die Anschauung gebildet, dafs als letzte Elemente, welche die Massen zusammensetzen, die Atome anzusehen sind oder regelmäfsig gebildete fest verbundene Gruppen einer endlichen Anzahl von Atomen, die Molekeln, welche in den wichtigsten mechanischen Eigenschaften dem Bilde der discreten Massenpunkte entsprechen, die mit ihnen eigenthümlichen Centralkräften auf einander wirken. Man wird im weiteren Ausbau dieser Hypothese dazu genöthigt anzunehmen, dafs die Molekularkräfte in solchen Distanzen, welche die Nachbarmolekeln im festen und tropfbaren Zustande von einander trennen, sehr grofs sind gegenüber den äufseren Kräften, die wir auf die Körper wirken sehen, z. B. gegenüber der Schwerkraft, dafs aber diese Kräfte bereits in Abständen, welche man aus verschiedenen Ueberlegungen ziemlich übereinstimmend auf die Gröfsenordnung von ein Zehn-Milliontel Millimeter (10^{-8} cm) schätzt, klein sind, und für alle noch gröfseren Entfernungen völlig unwirksam bleiben. Die Abstände der Nachbarmolekeln in den beiden cohärenten Aggregatzuständen müssen also danach noch kleiner als die eben bezeichnete Grenze des Wirkungsbereiches der Molekularkräfte angenommen werden.

Abstände von solcher Kleinheit werden immer der direkten sinnlichen Wahrnehmung unzugänglich bleiben, man kann nur in gewissen geeigneten Fällen auf indirectem Wege zur Schätzung derselben vordringen. So lange wir also mit Phänomenen zu thun haben, bei deren mathematischer Behandlung eine Zerlegung der Körper in solche Volumelemente genügt, deren Abmessungen immer noch sehr grofs gegen den Wirkungskreis der Molekularkräfte bleiben, wird die Vorstellung einer continuirlichen räumlichen Massenvertheilung immer mit Vortheil an die Stelle der Vorstellung von dem molekularen Aufbau der Materie gesetzt werden können; dies trifft zu bei dem gröfsten Theil der elastischen und hydrodynamischen Erscheinungen. Ausnahmen kommen freilich in gewissen charakteristischen Fällen vor. So ist z. B. die Farbenzerstreuung des Lichtes, d. h. die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge ein Phänomen, welches sich — gleichviel ob man die alte elastische oder die moderne elektromagnetische Lichttheorie zu Grunde legt — wohl nur dadurch erklären läfst, dafs die Wellenlängen nicht mehr unendlich grofs gegenüber der Wirkungsweite der Molekularkräfte gesetzt werden dürfen, dafs man also entweder in solchen Raumelementen, welche grofs genug sind um continuirlich mit Masse erfüllt gelten zu dürfen, immer verschiedene Zustände — Phasen der Wellen — neben einander hat, oder wenn man zu so kleinen Räumen übergeht, in denen der Schwingungszustand überall als gleich gelten kann, dafs da die Molekularkräfte über die Grenzen des Elementes hinaus oder ganz durch dasselbe hindurchgehen. In solchen Fällen werden besondere Betrachtungen nothwendig, für welche das einfache Schema der continuirlichen Massen nicht ausreicht, in denen man gezwungen wird auf die Molekulartheorie zurückzugehen.

Es ist auch unternommen worden, auf directer Grundlage der Vorstellung von den discreten Molekeln eine Elasticitätstheorie aufzubauen. Die Probleme sind aber in ihrer ganzen möglichen Allgemeinheit gar nicht zu bewältigen. Erstens kennt man nicht das Gesetz, nach welchem die molekularen Centralkräfte von der Entfernung abhängen sollen, und zweitens, selbst wenn man es kennen würde, ist bereits das Dreikörperproblem, d. h. die Bewegung eines Systems von drei Massenpunkten unter der Wirkung bekannter innerer Kräfte nicht allgemein lösbar, geschweige denn das gleiche Problem für aufserordentlich viele Punkte. Man wird also beim Betreten dieses Weges zur Aufstellung weiterer, die Betrachtung vereinfachender Hypothesen genöthigt, sowohl über die regelmäfsige räumliche Anordnung der Molekeln als auch über die Gesetze der zwischen ihnen wirkenden Anziehungs- und Abstofsungskräfte. POISSON hat eine solche Theorie in sich folgerichtig durchgeführt. Dafs deren Resultate zu eng sind und nicht die ganze Mannigfaltigkeit der experimentell festgestellten Thatsachen erklären, liegt daran, dafs die im Interesse der mathematischen Durchführbarkeit hinzugenommenen hypothetischen Annahmen jedenfalls von zu specieller Art sind. Der Weg, welchen wir einschlagen werden, geht von weniger engen Voraussetzungen aus, er verzichtet auf die Betrachtung der einzelnen Molekeln und ihrer gegenseitigen Kraftwirkungen, nimmt vielmehr continuirlich verbreitete Massen an, deren innere Kräfte bei der natürlichen Form der Körper, welche diese ohne Einwirkung äufserer Kräfte zeigen, jedenfalls im stabilen Gleichgewicht sind. Im Uebrigen wird nur vorausgesetzt werden, dafs die bei einer Deformation auftretenden inneren Kräfte, welche dann nicht mehr im Gleichgewicht sind, sondern Resultanten liefern, welche den äufseren angreifenden Kräften das Gleichgewicht halten, dafs diese sogenannten elastischen Kräfte conservativ sind, dafs also eine potentielle Energie existirt, welche in der natürlichen Lage der Massentheilchen ein absolutes Minimum ist, und deren Mehrbetrag im deformirten Zustande sich aus den Abmessungen der Gestaltsveränderung mathematisch ausdrücken läfst. Auf diese Betrachtungen werden wir aber erst im zweiten Theile eingehen.

§ 3. Ungeordnete und geordnete Bewegungen.

In der Kinematik der discreten Massenpunkte zu Anfang des ersten Bandes dieser Vorlesungen wurden die Begriffe aufgestellt, welche zur Darstellung der Bewegungen von Massenpunkten in der Zeit tauglich sind. Erstens die Coordinaten, welche zur Ortsbestimmung dienen, mufsten drei von einander unabhängige geometrische

Abmessungen sein, welche jeden Raumpunkt eindeutig zu bestimmen geeignet sind. Diese mufsten nicht nur stetige, sondern zweimal differenzirbare Functionen der Zeit sein: die ersten Differentialquotienten definirten die Componenten der Geschwindigkeit, die zweiten Differentialquotienten die der Beschleunigung.

Um diese Begriffe auch bei der Darstellung der Bewegungen continuirlicher Massen anwenden zu können, ist es nöthig anzunehmen, dafs man auch in der räumlich verbreiteten Substanz jedes individuelle Massentheilchen verfolgen und zu verschiedenen Zeiten als das gleiche wiedererkennen kann. Darüber werden wir nachher eine besondere Betrachtung anstellen. Sobald man an der Molekular-Hypothese festhält, d. h. im Wesentlichen an den Systemen discreter Massenpunkte, wenn auch von aufserordentlich feiner Vertheilung und grofser Anzahl, so hat man über den Begriff der Bewegung des Systems nichts weiteres Neues festzusetzen, die Bewegung setzt sich dann eben zusammen aus den Bewegungen aller einzelnen Elementarpunkte. Indessen lassen sich von vornherein zwei verschiedene Typen der Gesammtbewegung gegensätzlich unterscheiden, durch welche dann in der Molekulartheorie auch ganz verschiedene Naturerscheinungen gedeutet werden.

Man kann sich einerseits vorstellen, dafs die Bewegung jedes einzelnen Massenpunktes unabhängig von derjenigen der benachbarten Punkte verläuft, dafs zwischen diesen weder in Richtung noch in Gröfse der Geschwindigkeit eine Aehnlichkeit besteht, dafs vielmehr die verschiedensten Bewegungsarten überall dicht neben einander regellos vorkommen. Es kann dabei noch zutreffen, dafs diejenigen Massenpunkte oder Molekeln, welche einmal benachbart sind, dies auch bleiben, dafs keines sich weit von seinem Orte entfernt, sondern beliebige vibrirende oder kreisende Bewegungen um eine mittlere Lage ausführt; es kann aber auch völlig freie Beweglichkeit herrschen, in Folge deren die Nachbaren nach sehr kurzer Zeit schon verhältnifsmäfsig weit von einander getrennt sind und bleiben. Die hierdurch charakterisirten Bewegungsarten nennen wir „ungeordnete Bewegungen“. Die Molekulartheorie erklärt durch solche den Wärmezustand der Körper. Die einem Körper zugeführte Wärmemenge ist danach eine Vemehrung seines Energieinhaltes, welche sowohl in kinetischer Energie, Steigerung der Geschwindigkeit der Molekeln, als auch in potentieller Energie, z. B. Vergröfserung des Abstandes der Molekeln, d. h. Arbeitsleistung gegen die molekularen Anziehungskräfte, bestehen kann.

Für die ungeordnete und freie Bewegung (in der Molekular-hypothese Charakteristik der flüssigen Aggregatzustände) haben wir einen anschaulichen Vergleich in einem Mückenschwarm: Jedes einzelne Thierchen darin führt seine besondere Bewegung aus, welche keinerlei Aehnlichkeit mit der der Nachbaren zu haben pflegt, die Richtung der Bahn steht jedem Individuum frei, jedes ist fähig und bereit, diese jederzeit nach Belieben zu ändern und nach einer anderen Richtung und mit anderer Geschwindigkeit weiter zu gehen, und thut dies auch, wahrscheinlich in Folge sinnlicher Wahrnehmungen, welche sich auf die Nachbaren beziehen. Für die an die äufsere Begrenzung des Schwarmes gelangten Mücken mufs das Bestreben herrschen, sich nicht noch weiter zu entfernen, sondern in die Mitte zurückzukehren, sonst würde sich der Schwarm in kürzester Zeit zerstreuen; die rings von Nachbaren umgebenen aber müssen den Willen äufsern, Spielraum zu ihrer ungestörten Bewegung um sich her zu bewahren, sonst würde der Schwarm sich mehr und mehr verdichten. Aus beiden Bestrebungen zusammen erklärt sich der stationäre Bewegungszustand, der seinen Ausdruck findet in der für längere Zeit bewahrten unveränderten Gestalt und Lage des ganzen Schwarmes. Betrachtet man nun einen solchen Mückenschwarm aus so grofser Entfernung, dafs die einzelnen Thierchen und deren Bewegungen nicht erkennbar sind, so erscheint er als ein ausgedehntes ruhendes Gebilde, welches dem Augenscheine nach continuirlich mit Masse erfüllt ist, ebenso wie eine aus Kohlenstäubchen und Wassertröpfchen gebildete Rauchwolke auch noch aus geringerer Entfernung erscheint. Wir würden dann auch keine Veränderung beobachten, wenn plötzlich sämmtliche Mücken stillständen und sich schwebend auf ihren Plätzen hielten. In dieser Lage befinden wir uns ungefähr durch unsere sinnliche Anschauung den aus bewegten Molekeln zusammengesetzt gedachten Naturkörpern gegenüber. Nun kann es wohl eintreten, dafs wir den ganzen Mückenschwarm langsam und stetig seinen Ort, seine Gestalt oder beides zugleich verändern sehen. In Wirklichkeit geschieht dies auch nur durch das Zusammenwirken der freien Bewegungen jedes Individuums, welche ebenso regellos erfolgen, wie sonst; die langsame stetige Orts- und Gestaltsänderung würde aber für unser Auge in ganz derselben Weise erfolgen, wenn jede der vorher unbeweglich schwebend gedachten Mücken jetzt nur an der langsamen Bewegung des ganzen Schwarmes Theil nähme. Diese gedachte Bewegung ist wesentlich verschieden von der thatsächlichen schwärmenden, bei dieser bleiben die Nachbaren neben einander, die gegenseitige Anordnung bleibt unverändert und je näher zwei Individuen bei einander stehen, um so ähnlicher sind auch ihre Bahnen, welche sie durchlaufen, und um so näher gleich sind die Geschwindigkeiten, mit denen dies geschieht. Eine solche Bewegung, welche man sich von jedem System dicht gedrängter materieller Punkte ausgeführt denken kann, nennen wir eine „geordnete Bewegung“. Es ist ohne Weiteres einleuchtend, dafs man den Bewegungszustand des fortrückenden und sich dabei deformirenden Massensystems, also in unserem Vergleich des Mückenschwarmes, auffassen kann als ungestörte Superposition der bestimmten geordneten Bewegung und einer solchen ungeordneten Bewegung, bei welcher das ganze System, der ganze Schwarm, seinen Ort und seine Gestalt nicht verändert, dafs man also in der Vorstellung beide Arten von Bewegung trennen und gesondert betrachten kann, ohne auf die andere Rücksicht zu nehmen. Die Möglichkeit dieser getrennten Betrachtung ist für unser gegenwärtiges Thema sehr wichtig, bei welchem nur die geordneten Bewegungen betrachtet werden sollen.

§ 4. Geordnete Verrückungen continuirlicher Massen.

Wir wollen nun betrachten, wie es sich mit der Vorstellung der beiden entgegengesetzten Bewegungstypen verhält, wenn wir von den Systemen aufserordentlich vieler kleiner und eng benachbarter Massenpunkte übergehen zur continuirlichen Massenverbreitung im Raume. Ein geometrischer Punkt deckt dann wegen seiner Ausdehnungslosigkeit überhaupt keine Masse, auch keine verschwindend kleine. Auch das geringste Massenelement nimmt dann noch einen Raum ein, längs dessen geschlossener Oberfläche es lückenlos an die benachbarten Massen angrenzt. Die Vorstellung einer ungeordneten Bewegung der benachbarten, längs gemeinsamer Grenzflächen an einander stofsenden Massenelemente wird dadurch unmöglich, da jedes abgegrenzte Massenelement, um sich bewegen zu können, seine Nachbarschaft entweder mitnehmen oder in bestimmter Weise bei Seite drängen mufs; wenn also wirklich einem einzelnen Massenelement eine willkürliche Bewegung zugeschrieben würde, so könnten sich alle in der Umgebung liegenden nicht mehr regellos bewegen, sondern nur in einer gewissen Ordnung. Dies gilt auch noch, wenn man annimmt, dafs das Massenelement sich irgendwie deformirt, um weiter vordringen zu können. Der Begriff der geordneten Bewegung hingegen setzt einem Uebergang zur Vorstellung continuirlicher Massen keine Schwierigkeit in den Weg, ja es ist dies die einzige Form, in welcher man sich continuirliche Massen bewegt vorstellen kann.

Wir können uns die Substanz durch ein beliebig enges System von den ganzen Raum lückenlos ausfüllenden Zellen zerschnitten denken, deren Form willkürlich ist. Nachdem dies geschehen, wollen wir die Zellwände, welche bisher nur eine geometrische Fiction sind, fest in der Substanz haftend denken, so dafs die in einer jeden Zelle eingeschlossene Masse auch im Verlauf der Bewegung in derselben enthalten bleibt. Die Flächenschaaren, durch welche die Zerschneidung bewirkt gedacht ist, werden sich dann bei einer geordneten Bewegung stetig im Raume verschieben, die Eckpunkte der Zellenpolyeder, in welchen drei Flächen sich durchschneiden, werden sich verschieben, wie discrete Massenpunkte bei geordneter Bewegung eines Punktsystems, obwohl die Eckpunkte hier nicht als Träger einer auch noch so kleinen Masse auftreten. Man sieht daraus, dafs es begrifflich möglich ist, auch in continuirlich verbreiteten Massen punktförmige — ausdehnungslose — Gebilde gleich Massenpunkten in ihrer Bewegung zu verfolgen, und zwar kann wegen der beliebigen Wahl des Zellensystems diese Verfolgung einen jeden Punkt betreffen, der in der Masse zu einer bestimmten Zeit durch einen bestimmten geometrischen Punkt bezeichnet ist. Es wird nach diesen Auseinandersetzungen nicht mehr zu Mifsverständnissen führen, wenn wir im Folgenden der Kürze wegen auch auf solche in der continuirlichen Masse festhaftende Punkte die Bezeichnung „Massenpunkte" übertragen, sobald wir nur dessen eingedenk bleiben, dafs an ihnen kein bestimmter Betrag von Masse haftet, sondern dafs man höchstens angeben kann, wie grofs die Massendichtigkeit in diesem Punkte zu einer bestimmten Zeit ist. Es kommt einem solchen Massenpunkt selbst auch keine Trägheit zu, aber es müssen für seine Bewegung die Begriffe der Geschwindigkeit und Beschleunigung, d. h. die beiden ersten Differentialquotienten seiner Ortscoordinaten nach der Zeit mit endlichen Werthen existiren, weil er von denselben trägen Massen umschlossen bleibt. Diese Massenpunkte bilden nun gleich den geometrischen Punkten ein Continuum von drei Dimensionen, und zwar zu allen Zeiten. Die Geschwindigkeiten, welche die Verrückungen derselben in einem Zeitelement anzeigen, müssen daher nicht nur nach der Zeit differenzirbare Functionen sein, sondern auch differenzirbare Functionen festliegender Raumcoordinaten.

Dieses Auftreten der Raumcoordinaten als Variabele, nach denen man die Geschwindigkeiten differenziren kann, ist das wesentliche

Charakteristikum der continuirlich verbreiteten Massen im Gegensatz zu den Systemen discreter Massenpunkte, bei welchen die Zeit die einzige Urvariabele ist. Bei diesen hatte es keinen Sinn, von einem Massenpunkt durch den leeren Raum zu einem Nachbar hinüberzugehen, um zu beobachten, wie sich dabei der Bewegungszustand allmählich verändere, denn es existirt auf dem ganzen Wege gar keine Masse, deren Bewegungszustand angegeben werden könnte, vielmehr erst am Ziel tritt uns der andere Massenpunkt entgegen mit seinem individuellen Bewegungszustand, den wir unabhängig bestimmen müssen. Von einer differenzirbaren Function der Raumcoordinaten ist aber dabei keine Rede, diese hat nur Sinn bei continuirlich verbreiteten Massen und der ihnen angepassten Vorstellung der geordneten Bewegungen.

§ 5. Analytische Darstellung geordneter Verrückungen.

Aus der soeben dargelegten Eigenschaft der geordneten Bewegungen continuirlich verbreiteter Massen, dafs nämlich die Geschwindigkeiten der Massenpunkte differenzirbare Functionen der Raumcoordinaten sein müssen, folgen ohne weitere Annahmen bestimmte analytische Formen, in den man die Lagenveränderungen ausdrücken kann. Wir wollen absichtlich hier nur von Lagenänderungen, nicht von Geschwindigkeiten sprechen, um die Auseinandersetzungen allgemeiner zu halten. Verfolgen wir nämlich die bewegte Substanz während eines hinreichend kurzen Zeitelementes, so wird jeder beobachtete Massenpunkt eine kleine Wegstrecke zurücklegen, welche als geradlinig gelten kann. Der Grenzwerth dieser Strecke, dividirt durch das Zeitelement, definirt dann die Geschwindigkeit, es ist also stets möglich, auf diesen Begriff überzugehen, wo es erwünscht ist. Die Vorstellung, dafs zu jedem beobachteten Massenpunkt eine bestimmte kleine gerichtete Strecke zugehört, ist aber auch anzuwenden in Fällen, wo keine Bewegung mehr herrscht, sondern eine auf dem Wege der geordneten Bewegung entstandene Deformation ruhend fortbesteht. Die kleinen Strecken bezeichnen alsdann die Verrückungen, welche ein jeder Punkt gegenüber einer Anfangslage, z. B. einer natürlichen Gleichgewichtslage erfahren hat, ja der Begriff läfst sich auch festhalten, wenn die Deformation sich in der Zeit verändert, wie das z. B. bei schwingenden Körpern der Fall ist. Das gemeinsame Merkmal ist, dafs sowohl die kleinen Verrückungen als auch die kleinen während des Zeitelementes durchlaufenen Wegstrecken in dem von Masse erfüllten Raum eine geordnete Vectorgröfse darstellen, die man nach den Coordinatrichtungen in drei Componenten zerlegen kann, welch' letztere differenzirbare Functionen der Raumcoordinaten sind. Die Complication, dafs diese Vectoren auch Functionen der Zeit sind, wollen wir bei dieser Betrachtung ausschliefsen, also nur gleichzeitig bestehende Verschiebungen betrachten. Die Betrachtung wird dann aus einer kinematischen eine rein geometrische, wir haben nur zu vergleichen die Lage einer ausgedehnten Masse vor und nach einer kleinen Verschiebung, ob letztere durch Bewegung während des fest bestimmten Zeitelementes oder durch eine einmal erzeugte und dann in Ruhe bestehende Deformation hervorgebracht ist, bleibt dabei gleichgültig. Vor der Verrückung kann durch jeden geometrischen Punkt, also durch Angabe dreier Coordinaten x, y, z ein bestimmter Massenpunkt bezeichnet werden. Den Ort, an den ein Massenpunkt nach der Verschiebung gerückt ist, bezeichnen wir durch die Coordinaten $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$, also sind ξ, η, ζ die Componenten der Verrückung, von welchen wir verlangen müssen, dafs sie differenzirbare Functionen der x, y, z, also der Coordinaten vor der Verrückung sind. Haben wir daher für einen ausgewählten Massenpunkt, der anfänglich an dem Orte x_0, y_0, z_0 lag, die Verrückungscomponenten ξ_0, η_0, ζ_0 bestimmt, so können wir mit Hülfe der auf diesen Ort bezogenen Localwerthe der Differentialquotienten, also solcher Gröfsen

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \cdot \partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \cdot \partial z}\right)_0 \text{ etc., etc.}$$

die Verrückungen für alle in der Umgebung dieses ausgewählten Nullpunktes gelagerten Massenpunkte durch Taylor'sche Reihen darstellen, deren Glieder nach Potenzen der Distanzcomponenten $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(z-z_0)$ des beliebigen Punktes von dem ausgewählten Punkte fortschreiten. Die Form dieser Entwickelungen ist bekanntlich:

$$\left.\begin{aligned}\xi = \xi_0 &+ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0 (y-y_0) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_0 (z-z_0)\\ &+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)_0 (x-x_0)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)_0 (y-y_0)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right)_0 (z-z_0)^2\\ &+ \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y \cdot \partial z}\right)_0 (y-y_0)(z-z_0) + \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z \cdot \partial x}\right)_0 (z-z_0)(x-x_0) +\\ &+ \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \cdot \partial y}\right)_0 (x-x_0)(y-y_0)\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

+ Glieder dritten und höheren Grades, in denen die Facultät der Ordnungszahl im Nenner auftritt.

Für η und ζ gelten zwei ganz gleichartige Reihen, welche man aus der vorstehenden bilden kann, indem man nur das Zeichen ξ überall, wo es vorkommt, durch η resp. ζ ersetzt. Auf die Convergenzbedingungen solcher Entwickelungen brauchen wir uns hier nicht einzulassen; der Gültigkeitsbereich erstreckt sich so weit, als die Differentialquotienten der ξ, η, ζ stetige Functionen sind, also keine Sprünge (Discontinuitäten) aufweisen. Dann können die Differentialquotienten sogar nach Art einer geometrischen Reihe der Ordnungszahl wachsen, die Entwickelung convergirt doch durch die Kraft der im Nenner stehenden Facultäten. Bis zu welcher Ordnungszahl man die Glieder berücksichtigen mufs, das hängt von verschiedenen Umständen ab: Erstens von der Art der auszudrückenden Deformation, zweitens von der Ausdehnung des Bereiches, in welchem die Darstellung gültig sein soll, und drittens von der verlangten Genauigkeit der Angabe. So wird um den Ausgangspunkt (x_0, y_0, z_0) herum ein gewisser Bereich bestimmt werden können, innerhalb dessen man bereits nach den Gliedern ersten Grades abbrechen darf, weil der Beitrag, den die höheren Glieder noch zur Summe liefern, verschwindend klein ist gegenüber den linearen Gliedern. Wir wollen einen solchen Bereich kurzweg einen kleinen Bereich nennen, dabei aber wohl eingedenk sein, dafs der Begriff der Kleinheit hierbei durchaus abhängt von der räumlichen Anordnung der Verrückungen, also von der Art der Deformation und von der zu fordernden Genauigkeit der Angaben, und nicht etwa davon, dafs die Mafszahlen der Distanzcomponenten $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ kleine Brüche sind, deren höhere Potenzen und Producte gegen die ersten Potenzen vernachlässigt werden dürfen. Die Mafszahlen hängen nämlich von der gewählten Längeneinheit ab und können bei genügender Kleinheit dieses Mafsstabes beliebig grofse Zahlenwerthe auch im Inneren des kleinen Bereiches erhalten; das Abbrechen der Reihe hinter den linearen Gliedern ist alsdann nicht darauf zurückzuführen, dafs etwa $(x - x_0)^2$ unendlich klein gegen $(x - x_0)$ wird, sondern darauf, dafs $\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)_0$ und alle anderen höheren Differentialquotienten Zahlenwerthe erhalten, welche verschwinden gegen den Zahlenwert von $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0$ oder den eines anderen der ersten Differentialquotienten.

Bricht man erst hinter den Gliedern des zweiten Grades ab, so kann man dadurch die Verrückungen in weit umfassenderen Bereichen einheitlich darstellen. Wir werden im dritten Theile dieses

Bandes bei Betrachtung der Torsion und der Biegung solche Glieder zweiten Grades verwenden. Übrigens kann man statt dessen einen weiteren Bereich immer zertheilen in eine Schaar „kleiner“ Bezirke, in deren jedem man die Reihenentwickelung nach den linearen Gliedern abbricht; nur sind dann für die Coefficienten $\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)$ etc. in jedem Bezirke verschiedene Localwerthe zu setzen.

§ 6. Gesetzmäfsigkeiten der geordneten Verrückungen im Inneren kleiner Bereiche continuirlich verbreiteter Massen.

Wir wollen uns nun auf die Betrachtung kleiner Bereiche beschränken, in denen wir die einfachsten Verhältnisse vorfinden. Die Componenten der Verrückung sind dann durch die auf die Glieder ersten Grades beschränkten Taylor'schen Entwickelungen nach Art der Gleichung (1) dargestellt. Die vorkommenden ersten partiellen Differentialquotienten, welche sich auf den Ausgangspunkt im Inneren des kleinen Bereichs beziehen sind 9 constante Coefficienten, welche die Natur der Verrückung definiren; wir wollen diese durch kürzere Bezeichnungen ersetzen:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{\partial \xi}{\partial x} = a_1 & \frac{\partial \xi}{\partial y} = a_2 & \frac{\partial \xi}{\partial z} = a_3 \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = b_1 & \frac{\partial \eta}{\partial y} = b_2 & \frac{\partial \eta}{\partial z} = b_3 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} = c_1 & \frac{\partial \zeta}{\partial y} = c_2 & \frac{\partial \zeta}{\partial z} = c_3 \end{array}\right\} \tag{2}$$

und erhalten so die Grundgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \xi_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (y - y_0) + a_3 (z - z_0) \\ \eta = \eta_0 + b_1 (x - x_0) + b_2 (y - y_0) + b_3 (z - z_0) \\ \zeta = \zeta_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (y - y_0) + c_3 (z - z_0). \end{array}\right\} \tag{3}$$

Um die Coordinaten der Massenpunkte nach der Verrückung zu erhalten, addiren wir zu jeder dieser drei Gleichungen die entsprechende der folgenden drei Identitäten:

$$\begin{array}{l} x = x_0 + (x - x_0) \\ y = y_0 + (y - y_0) \\ z = z_0 + (z - z_0) \end{array}$$

und finden so:

$$\left.\begin{aligned}
x+\xi &= x_0+\xi_0+(1+a_1)(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0)\\
y+\eta &= y_0+\eta_0+b_1(x-x_0)+(1+b_2)(y-y_0)+b_3(z-z_0)\\
z+\zeta &= z_0+\zeta_0+c_1(x-x_0)+c_2(y-y_0)+(1+c_3)(z-z_0)
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Nun wollen wir eine Reihe von Gesetzmäfsigkeiten der durch diese Gleichungen definirten Verrückungen aufsuchen.

Zunächst greifen wir aus der Masse ein Continuum von Massenpunkten heraus, welche nach der Verrückung sämmtlich in einer willkürlich gewählten Ebene liegen, deren verschobene Coordinaten $(x+\xi)$, $(y+\eta)$, $(z+\zeta)$ also sämmtlich eine und dieselbe lineare Gleichung befriedigen, welche wir schreiben können:

$$A\cdot(x+\xi)+B(y+\eta)+C(z+\zeta)+D=0, \tag{5}$$

und fragen, was für einen geometrischen Ort diese Punkte vor der Verrückung formirt haben, was also für eine analytische Beziehung zwischen den unverschobenen Coordinaten x, y, z dieser Punkte aus der Gleichung (5) folgt. Nun drücken uns die Gleichungen (4) die verschobenen Coordinaten als Functionen der unverschobenen aus, wir brauchen also nur für die $(x+\xi)$ etc. die rechten Seiten jener drei Gleichungen in (5) einzusetzen. Sondern wir dabei alle constanten Summanden ab und fassen die variabelen nach den Factoren x, y, z zusammen, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}
&\{A\cdot(1+a_1)+B\cdot b_1+C\cdot c_1\}\cdot x\\
&+\{A\cdot a_2+B(1+b_2)+C\cdot c_2\}\cdot y\\
&+\{A\cdot a_3+B\cdot b_3+C(1+c_3)\}\cdot z\\
&+\{A(\xi_0-a_1x_0-a_2y_0-a_3z_0)+B(\eta_0-b_1x_0-b_2y_0-b_3z_0)+\\
&\qquad+C(\zeta_0-c_1x_0-c_2y_0-c_3z_0)+D\}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(5\,\mathrm{a})$$

Dies ist eine lineare Gleichung zwischen den unverschobenen Coordinaten x, y, z, bezeichnet also ebenfalls eine Ebene. Diejenigen Massenpunkte, welche nach der Verschiebung in einer Ebene liegen, müssen bereits vor der Verschiebung in einer Ebene gelegen haben. Dieser Satz läfst sich auch umkehren, so dafs man allgemein sagen kann: Alle in der Substanz festhaftenden Ebenen bleiben bei der Verrückung Ebenen. Die constanten Coefficienten der Gleichung (5a) sind in geschweifte Klammer eingeschlossen. Man sieht, dafs diese von den Coefficienten in Gleichung (5) sowohl absolut wie auch in ihrem Gröſsenverhältniſs zu einander abweichen. Die Ebenen werden also im Allgemeinen bei der Verrückung Lage und Richtung verändern. Man sieht aber auch, daſs das constante Glied der Gleichung (5), nämlich D, auch in (5a) nur als Summand des constanten Gliedes dieser Gleichung auftritt, in den Coefficienten von x, y, z dagegen fehlt. Denkt man sich also eine ganze Reihe von Gleichungen (5) aufgestellt, welche sich nur durch verschiedene Werthe der Constante D unterscheiden, so folgen daraus auch lauter Gleichungen (5a), welche nur in dem constanten Gliede (welches die vierte und fünfte Zeile jener Gleichung bildet) von einander abweichen. Nun lehrt die analytische Geometrie, daſs mehrere lineare Gleichungen, welche nur in dem von x, y, z freien Gliede verschieden sind, oder welche auf eine solche Form gebracht werden können, daſs dies zutrifft, daſs solche Gleichungen eine Reihe von parallelen Ebenen im Raume definiren. Wir können deshalb aus der Gleichung (5a) noch das Gesetz herauslesen, daſs Ebenen in der Substanz, welche nach der Verrückung parallel sind, auch schon vor der Verrückung parallele Ebenen waren, oder umgekehrt, daſs parallele Ebenen auch bei der Verrückung der Substanz parallel bleiben.

Eine directe Folgerung aus diesen Sätzen bezieht sich auf gerade Linien, welche durch bestimmte Massenpunkte der Substanz gebildet werden, denn gerade Linien können immer als Schnitte zweier Ebenen aufgefaſst werden, und parallele gerade Linien als Schnitte von parallelen Ebenen mit einer anders gerichteten Ebene. Die betreffenden Sätze lauten: Alle in der Substanz festliegenden geraden Linien bleiben bei der Verrückung gerade und alle parallelen Geraden bleiben parallel, wenn auch ihre gemeinsame Richtung durch die Verrückung im allgemeinen verändert wird.

Eine zweite Gesetzmäſsigkeit betrifft die Oberflächen zweiten Grades. Wir greifen aus der continuirlichen Masse ein Continuum von Massenpunkten heraus, welches nach der Verrückung eine geschlossene Oberfläche zweiten Grades, also ein Ellipsoid formirt, dessen Mittelpunkt mit dem Massenpunkt zusammenfällt, der uns als Ausgangspunkt dient. Da die Wahl dieses Punktes ganz unserem Belieben überlassen ist, so kann jedes Ellipsoid im Inneren des Bereiches in Betrachtung gezogen werden.

Der Mittelpunkt dieses Ellipsoides hat also die Coordinaten $x_0 + \xi_0$, $y_0 + \eta_0$, $z_0 + \zeta_0$ und die allgemeine Gleichung desselben ist:

$$\left.\begin{aligned}&A\{(x+\xi)-(x_0+\xi_0)\}^2+B\{(y+\eta)-(y_0+\eta_0)\}^2+C\{(z+\zeta)-(z_0+\zeta_0)\}^2\\&\quad+2D\{(y+\eta)-(y_0+\eta_0)\}\{(z+\zeta)-(z_0+\zeta_0)\}\\&\quad+2E\{(z+\zeta)-(z_0+\zeta_0)\}\{(x+\xi)-(x_0+\xi_0)\}\\&\quad+2F\{(x+\xi)-(x_0+\xi_0)\}\{(y+\eta)-(y_0+\eta_0)\}\\&\quad+\ G=0.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Die in geschweifte Klammern eingeschlossenen Terme lassen sich leicht aus Gleichung (4) als Functionen der $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(z-z_0)$ darstellen, und zwar sind es lineare homogene Functionen. Wenn wir also die in vorstehender Gleichung vorkommenden Quadrate und Producte ausführen, so werden wir das Ganze folgendermaſsen ordnen können:

$$\left.\begin{aligned}&A_1(x-x_0)^2+B_1(y-y_0)^2+C_1(z-z_0)^2+2D_1(y-y_0)(z-z_0)\\&+2E_1(z-z_0)(x-x_0)+2F_1(x-x_0)(y-y_0)+G_1=0.\end{aligned}\right\}\tag{6a}$$

Die Coefficienten A_1, B_1, ... G_1 sind zusammengesetzt aus den A, B, ... G und den 9 Constanten a_1 bis c_3. Diese Gleichung bezeichnet ebenfalls eine Oberfläche zweiten Grades und, da alle Punkte x, y, z in endlicher Entfernung liegen, ebenfalls ein Ellipsoid. Da ferner lineare Glieder fehlen, ist der Mittelpunkt desselben der Ausgangspunkt x_0, y_0, z_0. Da aber die Coefficienten in (6a) im Allgemeinen sämmtlich verschieden und von den entsprechenden in (6), so hat dieses andere Werthe und auch andere Lage der Hauptaxen. Wir können mithin die Ableitung der Gleichung (6a) aus (6) mit Hülfe der Gleichungen (4) in folgenden Satz zusammenfassen: Massenpunkte, welche nach der Verrückung in der Oberfläche eines Ellipsoides liegen, haben auch schon vor der Verrückung in einer anderen Ellipsoidfläche gelegen, und derjenige Massenpunkt, welcher nach der Verrückung im Mittelpunkt des Ellipsoides liegt, lag auch vor der Verrückung im Mittelpunkte des anderen Ellipsoides. Umgekehrt lautet der Satz: Alle in der Substanz festliegende Ellipsoide bleiben bei der Verrückung Ellipsoide, der im Mittelpunkt liegende Massenpunkt bleibt Mittelpunkt; dagegen verändern sich im Allgemeinen die Gröſsen und Richtungen der Hauptaxen. Da ferner eine Ellipse immer als Centralschnitt eines Ellipsoides und einer Ebene angesehen werden kann und beide Flächenarten ihren Charakter bewahren, so folgt direct noch der Satz: Massenpunkte, welche eine Ellipse formiren, thun dies auch nach der Verrückung, und der im Mittelpunkt liegende Massenpunkt bleibt dabei Mittelpunkt. Da die Kugel ein besonderer Fall der Ellipsoidgestalt ist, so wird auch eine in der Substanz abgegrenzte Kugel durch die Verrückung in ein Ellipsoid übergehen.

Hätten wir die Beschränkung auf „kleine“ Bereiche nicht gemacht, so würden wir nicht so bestimmte Gesetze haben folgern können, sondern wir würden nur gefunden haben, dafs Ebenen in Flächen von stetiger Krümmung, gerade Linien in eben solche Raumcurven übergehen und dafs Ellipsoide jedenfalls geschlossene Flächen bleiben.

§ 7. Deformationen.

In der Darstellung der Verrückungen durch Gleichung (3) dienten die Coordinaten und die Verrückung eines beliebig gewählten Ausgangspunktes, also die Gröfsen x_0, y_0, z_0, ξ_0, η_0, ζ_0 als nothwendige Hülfsmittel, um die ξ, η, ζ auf ein im Raume festliegendes Coordinatensystem beziehen zu können. In vielen Fällen interessiren uns nun die absoluten Beträge der Verrückungen nicht, sondern nur die Formveränderungen, welche irgendwie in dem kleinen Bereich abgegrenzte Substanzmengen erfahren. Dabei kommt es nicht auf die Verrückung und auf die Anfangslage des Ausgangspunktes an, sondern nur darauf, wie sich die relative Lage der Massenpunkte gegen den Ausgangspunkt verändert. Diese würden wir finden, wenn wir statt des im Raume festliegenden Coordinatensystems ein anderes zu Grunde legen, welches seinen Nullpunkt in dem ausgewählten Massenpunkt hat, und sich mit diesem verrückt, so dafs dabei die Richtungen der Axen unverändert bleiben. Als Coordinaten der Massenpunkte in diesem System würden dann nach der bisherigen Bezeichnung $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ und als Verrückungen $\xi-\xi_0$, $\eta-\eta_0$, $\zeta-\zeta_0$ anzusehen sein. Nennen wir diese nun wieder einfach x, y, z, ξ, η, ζ, so erhalten wir aus (3) und (4) die Gleichungen, welche sich auf ein im Ausgangspunkte, also in einem beliebigen Massenpunkte im Inneren des Bereiches festgelegtes Coordinatensystem beziehen. Formell findet man diese neuen Gleichungen, indem man in (3) und (4) $x_0 = y_0 = z_0 = \xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ setzt. Die Gleichungen lauten dann:

Für die Verrückungen:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ \eta &= b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ \zeta &= c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

und für die Coordinaten nach der Verrückung:

$$\left.\begin{aligned} x + \xi &= (1 + a_1)x + a_2\, y + a_3\, z \\ y + \eta &= b_1\, x + (1 + b_2)y + b_3\, z \\ z + \zeta &= c_1\, x + c_2\, y + (1 + c_3)z \end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

Diese einfacheren Gleichungen genügen für das Studium der erzeugten Deformationen. Die Verrückung des Ausgangspunktes ist dabei als gemeinsame translatorische Parallelverrückung des ganzen Bereiches eliminirt.

§ 8. Kleine Deformationen. Superposition.

Die 9 Coefficienten, welche als partielle Differentialquotienten der Verrückungen nach den Coordinaten eingeführt wurden, waren bisher nur der Beschränkung unterworfen, daſs sie nicht unendlich groſs werden durften. Ihrer Dimension nach sind sie ja, als Quotienten zweier Strecken, unbenannte Zahlen, mithin unabhängig von der gewählten Längeneinheit. Sobald man nun diesen 9 Coefficienten oder auch nur einigen derselben endliche Zahlenwerthe beilegt, so werden, wie die Gleichungen (7) erkennen lassen, die relativen Verrückungen von derselben Gröſsenordnung wie die Abstände vom Ausgangspunkt, welcher in diesen Gleichungen als unverrückt angesehen wird; die Deformationen sind dann sehr bedeutend. Setzt man beispielsweise nur $a_1 = 1$, alle übrigen Coefficienten $= 0$, so wird durch die damit bezeichnete Deformation der gegenseitige Abstand aller Massenpunkte in der x-Richtung verdoppelt. So bedeutende Deformationen hat man in der Physik höchst selten zu betrachten, von besonderem Interesse sind aber gerade die kleinen Deformationen, bei denen sich die Gestalt abgegrenzter Substanzmengen im Inneren der Körper nur sehr wenig im Verhältniſs zu ihren Dimensionen verzerrt, denn von dieser Art pflegen die Deformationen zu sein, welche kleine Bereiche elastischer Körper unter der Wirkung endlicher Kräfte zeigen, und welche kleine Bereiche strömender Flüssigkeiten in kurzen Zeitelementen erfahren. Wir wollen deshalb jetzt die weitere Beschränkung einführen, daſs die 9 Coefficienten a_1 bis c_3 verschwindend kleine, positive oder negative Zahlen sind, deren höhere Potenzen und Producte vernachlässigt werden dürfen. In diesem Falle bleiben die in den Gleichungen (7) und (8) vorkommenden ξ, η, ζ klein gegenüber den x, y, z.

Es ergiebt sich aus dieser Annahme eine wichtige Eigenschaft, die ungestörte Addition oder Superposition mehrerer kleiner Deformationen, welche wir jetzt beweisen wollen. Wir betrachten einen kleinen Bereich einer continuirlichen Masse, welcher eine erste Deformation erlitten hat, deren Coefficienten $a_1 \dots c_3$ sind, die Gleichungen (7a) geben die Coordinaten des Punktes, welcher vor der Deformation an dem Orte x, y, z lag. Diesem bereits deformirten Bereich ertheilen wir nun eine zweite Deformation, deren Coefficienten durch die 9 kleinen Zahlen $a_1' \dots c_3'$ bezeichnet werden sollen. Die neu hinzukommenden Verrückungen nennen wir ξ', η', ζ'. Die Coordinaten des Punktes, welcher ursprünglich in x, y, z und nach der ersten Deformation in $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ lag, werden nach der zweiten Verschiebung aus Gleichung (7a) gefunden, wenn wir die Daten der zweiten Verschiebung hineinsetzen, also a_1' statt a_1 und ξ' statt ξ, und ferner die Orte nach der ersten Verschiebung, also $(x + \xi)$ statt x etc. So folgt:

$$\begin{aligned} x + \xi + \xi' &= (1 + a_1')(x + \xi) + a_2'(y + \eta) + a_3'(z + \zeta) \\ y + \eta + \eta' &= b_1'(x + \xi) + (1 + b_2')(y + \eta) + b_3'(z + \zeta) \\ z + \zeta + \zeta' &= c_1'(x + \xi) + c_2'(y + \eta) + (1 + c_3')(z + \zeta). \end{aligned}$$

Die Beträge von $(x + \xi)$, $(y + \eta)$, $(z + \zeta)$, welche der ersten Verrückung entsprungen sind, giebt der buchstäbliche Ausdruck der Gleichungen (7a), welche hier hineinzusetzen sind. Also:

$$\begin{aligned} x + \xi + \xi' = (1 + a_1')\cdot\{(1 + a_1)x + a_2 y + a_3 z\} \\ + a_2' \cdot\{b_1 x + (1 + b_2)y + b_3 z\} \\ + a_3' \cdot\{c_1 x + c_2 y + (1 + c_3)z\} \end{aligned}$$

und ähnlich die beiden anderen Ausdrücke.

Wenn man nun die rechten Seiten ausmultiplicirt und alle Glieder fortläſst, welche Producte zweier kleiner Zahlen enthalten, so bleibt:

$$\left.\begin{aligned} x + \xi + \xi' &= (1 + a_1 + a_1')x + (a_2 + a_2')y + (a_3 + a_3')z \\ y + \eta + \eta' &= (b_1 + b_1')x + (1 + b_2 + b_2')y + (b_3 + b_3')z \\ z + \zeta + \zeta' &= (c_1 + c_1')x + (c_2 + c_2')y + (1 + c_3 + c_3')z. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die einander entsprechenden Coefficienten der beiden Verrückungen treten also einfach zu Summen zusammen, wir wären zu derselben Schluſsdeformation gelangt, wenn wir zuerst die mit den gestrichelten Coefficienten a_1' bis c_3' bezeichnete und darauf die mit den ungestrichelten Coefficienten a_1 bis c_3 bezeichnete Deformation vorgenommen hätten, und direct hätten wir den Endzustand aus dem undeformirten herleiten können durch eine einzige Deformation, deren Coefficienten $(a_1 + a_1')$, $(a_2 + a_2')$, $(a_3 + a_3')$, $(b_1 + b_1')$, ... $(c_3 + c_3')$ sind. Dies lehren die vorstehenden Gleichungen (8), es liegt hierin das Gesetz der ungestörten Superposition kleiner Deformationen. Ferner liegt darin aber auch umgekehrt eine Anweisung, wie man eine einheitliche Deformation auffassen kann als Superposition mehrerer. Diese Zerlegbarkeit ist für die Analysis von grofsem Nutzen, da man auf diese Weise eine complicirtere Veränderung auflösen kann in eine Reihe einfacherer und leichter zu übersehender Verrückungen. Wir werden dafür im § 9 sogleich ein Beispiel finden. Zunächst ist die Möglichkeit einer solchen Zerlegung unendlich mannigfaltig; will man z. B. eine vorliegende Deformation als Superposition zweier anderer gedachter Deformationen auffassen, so braucht man nur jeden der 9 Coefficienten in irgend einer Weise als Summe oder Differenz je zweier Coefficienten hinzustellen, unter denen auch einige den Werth Null haben können, so hat man zweimal 9 Coefficienten gefunden, welche zwei Deformationen definiren, deren Superposition die thatsächliche Deformation ergiebt. Die Zerlegung wird also stets im Interesse der Erleichterung der mathematischen Behandlung ausgewählt werden können, so wie es jeder einzelne Fall erfordert.

Wir wollen gleich an dieser Stelle eine Berechnung anfügen, deren Resultat wir im Folgenden gebrauchen werden. Es soll nämlich gefragt werden, in welcher Weise durch eine kleine Deformation der Abstand eines beliebigen Massenpunktes von dem Ausgangspunkt verändert wird. Die Veränderung bezieht sich im Allgemeinen sowohl auf die Länge als auch auf die Richtung, hier wollen wir nur die erste Aenderung betrachten. Der Abstand des Massenpunktes, der vor der Verschiebung im Orte x, y, z liegt von dem Ausgangspunkt, sei r. Es ist also:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Durch die Deformation gehe der Abstand über in $r + \varrho$, es ist also:

$$(r + \varrho)^2 = (x + \xi)^2 + (y + \eta)^2 + (z + \zeta)^2.$$

Für die verschobenen Coordinaten auf der rechten Seite sind deren Werthe aus Gleichungen (7a) einzusetzen, d. h. es sind die rechten Seiten der drei Gleichungen (7a) ins Quadrat zu erheben und zu addiren. Dabei sind wieder alle Terme fortzulassen, welche Quadrate oder Producte der 9 kleinen Coefficienten als Factoren enthalten. Es bleibt dann übrig:

$$(r+\varrho)^2 = (1+2a_1)x^2 + (1+2b_2)y^2 + (1+2c_3)z^2$$
$$+ 2(b_3+c_2)yz + 2(c_1+a_3)zx + 2(a_2+b_1)xy.$$

Wegen der Kleinheit von ϱ kann man links setzen $(r+\varrho)^2 = r^2 + 2r\varrho$, der Summand r^2 hebt sich auf gegen die rechts stehenden Summanden $x^2 + y^2 + z^2$ (d. h. die Summanden 1 der Coefficienten der ersten Zeile fallen fort), man hebt dann den gemeinsamen Factor 2 und erhält:

$$r\,.\,\varrho = a_1 x^2 + b_2 y^2 + c_3 z^2 + (b_3+c_2)yz + (c_1+a_3)zx + (a_2+b_1)xy. \tag{9}$$

Hiermit ist die Verlängerung ϱ ausgedrückt durch die Coefficienten der Deformation und die Coordinaten des gewählten Massenpunktes. Dividirt man diese Gleichung durch r^2, so erhält man links die unendlich kleine Verhältnifszahl ϱ/r zwischen Streckung und ganzer Länge des Radius, rechts treten die Brüche x/r, y/r, z/r auf, welche die Cosinus der 3 Winkel zwischen r und der Coordinataxen messen. Diese seien der Kürze wegen mit α, β, γ bezeichnet, es folgt dann:

$$\frac{\varrho}{r} = a_1 \cdot \alpha^2 + b_2 \cdot \beta^2 + c_3 \cdot \gamma^2 + (b_3+c_2)\beta\gamma + (c_1+a_3)\gamma\alpha + (a_2+b_1)\alpha\beta. \tag{9a}$$

Die verhältnifsmäfsige Streckung des Radius vector ist also reine homogene Function zweiten Grades seiner drei Richtungscosinus, sie besitzt mithin für alle Massenpunkte, welche auf ein und denselben durch den Ausgangspunkt gelegten Strahl liegen, den gleichen Werth.

§ 9. Absonderung der Drehung.

Wir betrachten eine kleine Deformation eines kleinen Bereiches, wie sie durch die Gleichungen (7) und (7a) definirt ist, führen aber für die 9 Coefficienten folgende besonderen Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{array}{lll} a_1 = a + 0 & a_2 = n - \nu & a_3 = m + \mu \\ b_1 = n + \nu & b_2 = b + 0 & b_3 = l - \lambda \\ c_1 = m - \mu & c_1 = l + \lambda & c_3 = c + 0\,. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Dafs die neu eingeführten Zeichen durch die früheren 9 Coefficienten eindeutig bestimmt sind, erkennt man leicht. Bei a_1, b_2, c_3 sind nur die Indices fortgelassen, für die übrigen 6 findet man:

$$\left.\begin{aligned} 2\,l &= c_2 + b_3, & 2\,m &= a_3 + c_1, & 2\,n &= b_1 + a_2 \\ 2\,\lambda &= c_2 - b_3, & 2\,\mu &= a_3 - c_1, & 2\,\nu &= b_1 - a_2\,. \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{a})$$

Geht man auf die in den Gleichungen (2) gegebenen Bedeutungen der 9 Zahlen a_1 bis c_3 zurück, so lauten diese Festsetzungen

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\partial \xi}{\partial x}, & 2\,l &= \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}, & 2\,\lambda &= \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}, \\ b &= \frac{\partial \eta}{\partial y}, & 2\,m &= \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}, & 2\,\mu &= \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ c &= \frac{\partial \zeta}{\partial z}, & 2\,n &= \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}, & 2\,\nu &= \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{a}')$$

Die Gleichungen (10) sagen nun aus, dafs wir die allgemeine Deformation zerlegen wollen in zwei besondere, was nach den Auseinandersetzungen über die ungestörte Superposition erlaubt ist. Als Coefficienten einer ersten Deformation nehmen wir die zweiten Summanden also

$$\left.\begin{matrix} 0 & -\nu & +\mu \\ +\nu & 0 & -\lambda \\ -\mu & +\lambda & 0 \end{matrix}\right\} \qquad (10\text{b})$$

für die zweite Deformation bleiben dann folgende Coefficienten:

$$\left.\begin{matrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c\,. \end{matrix}\right\} \qquad (10\text{c})$$

Wir beginnen mit der Betrachtung der ersten Deformation und suchen zunächst auf Grund von Gleichung (9) die Vergröfserung ϱ der Abstände r der Massenpunkte vom Ausgangspunkt. Dabei finden wir, dafs der Ausdruck $r \cdot \varrho$ gliedweise verschwindet, da einerseits hier die Diagonalglieder $a_1 = b_2 = c_3 = 0$ gesetzt sind, und ferner $c_2 + b_3 = \lambda - \lambda$, $a_3 + c_1 = \mu - \mu$, $b_1 + a_2 = \nu - \nu$, also $= 0$ werden. Die Massenpunkte verändern also ihre Abstände vom Ausgangspunkt nicht; da aber der Ausgangspunkt ein ganz beliebig zu wählender Massenpunkt des Bereiches ist, so verändern die sämmtlichen Massenpunkte ihre gegenseitige Lage überhaupt nicht; die durch die Coefficienten (10b) definirte Verrückung ist mithin gar keine echte Deformation, sondern nur eine Lagenänderung des ganzen Bereiches, wie sie auch bei einem ideal-starren System möglich ist. Eine translatorische Verrückung kann in unseren Gleichungen nicht mehr zum Ausdruck kommen, da unser Coordinaten-Nullpunkt an einen bestimmten Massenpunkt geheftet ist und sich mit diesem zugleich verrückt. Die einzige übrigbleibende Lagenänderung ist eine kleine Drehung des Bereiches um irgend eine durch den Ausgangspunkt gelegte Axe, welche wir nun zu suchen haben. Die Verrückungscomponenten des Punktes x, y, z sind nach (10b)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\nu y + \mu z \\ \eta &= +\nu x - \lambda z \\ \zeta &= -\mu x + \lambda y. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Die resultirende Verrückung χ ist gegeben durch:

$$\chi^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

oder laut Gleichungen (11)

$$\begin{aligned} \chi^2 = \quad & \qquad\qquad \nu^2 y^2 + \mu^2 z^2 - 2\mu\nu y z \\ & + \nu^2 x^2 \qquad\qquad + \lambda^2 z^2 - 2\nu\lambda z x \\ & + \mu^2 x^2 + \lambda^2 y^2 \qquad\qquad - 2\lambda\mu x y. \end{aligned}$$

Addirt man hierzu die Identität

$$0 = \lambda^2 x^2 + \mu^2 y^2 + \nu^2 z^2 - \lambda^2 x^2 - \mu^2 y^2 - \nu^2 z^2,$$

so kann man den Ausdruck folgendermaſsen zusammenfassen:

$$\chi^2 = \{(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(x^2 + y^2 + z^2)\} - (\lambda x + \mu y + \nu z)^2. \tag{11a}$$

Da sich der Bereich bei dieser Verrückung verhält wie ein starrer Körper, so genügt es eine Schaar von Massenpunkten zu verfolgen, welche auf einer um den Ausgangspunkt als Centrum gelegten Kugelfläche zu finden sind. Für alle diese ist $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ derselbe Werth und bleibt auch als Kugelradius bei der Drehung ungeändert; deshalb ist auch für alle Punkte der Kugelfläche der in geschweifte Klammer geschlossene Minuendus des Ausdruckes χ^2 in vorstehender Gleichung (11a) immer der gleiche, die verschiedene Gröſse der Verrückung χ für verschiedene Punkte der Kugelfläche kann nur von dem Subtrahendus $(\lambda x + \mu y + \nu z)^2$ herrühren, und zwar wird χ^2 um so gröſser, je kleiner letzterer ausfällt. Als Quadrat hat dieser nun den Minimalwerth Null, die gröſste Verrückung müssen daher jene Massenpunkte erfahren, deren Coordinaten die Bedingung erfüllen:

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0. \tag{11b}$$

Diese Gleichung bestimmt nun eine durch den Ausgangspunkt gelegte Ebene, sie schneidet die Kugelfläche in einem gröfsten Kreise, welcher den Aequator der gedrehten Kugel darstellt, weil in ihm die gröfsten Verrückungen stattfinden. Die Drehungsaxe ist die Normale auf der Ebene (11 b), bildet also mit den Coordinataxen Winkel, deren Cosinus gegeben sind durch:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}, \quad \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}, \quad \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}. \tag{11c}$$

Der Quadratwurzel ist dabei in allen drei Ausdrücken das gleiche Vorzeichen beizulegen, durch dessen Wahl festgelegt wird, welche der beiden entgegengesetzten Normalenrichtungen auf der Aequatorebene durch vorstehende Cosinus angezeigt wird. Rechnet man die Wurzel positiv, so sind die Cosinus gleichstimmig mit den algebraischen Coefficienten λ, μ, ν, rechnet man sie negativ, so sind die Cosinus alle drei vom entgegengesetzten Vorzeichen als die entsprechenden Coefficienten. Man kann sich deshalb in beiden Möglichkeiten leicht orientiren, in welches von den acht Coordinatfächern des Raumes der Pfeil der Normale hineinweist.

Das Quadrat der maximalen Verrückung, welche die im Aequator gelegenen Massenpunkte erfahren, ist gegeben durch den Minuendus in Gleichung (11 a):

$$(\chi_{\max})^2 = (\lambda^2+\mu^2+\nu^2)(x^2+y^2+z^2)$$

und da $(x^2+y^2+z^2) = r^2$ auch das Quadrat des Aequatorradius darstellt, ist das Quadrat des kleinen Drehungswinkels ϑ, den der ganze Bereich erfährt: $\vartheta^2 = \lambda^2+\mu^2+\nu^2$. Daraus folgt für den Drehungswinkel selbst der gleichfalls doppeldeutige Ausdruck

$$\vartheta = \sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \tag{11d}$$

Die hier betrachtete Verrückung ist nun aber durch die zu Grunde gelegten linearen Gleichungen (10) zweifellos eindeutig definirt; die Zweideutigkeit der Ausdrücke (11 c und d) zeigt also an, dafs hier bei der Betrachtung rotatorischer Phänomene ein bestimmter Zusammenhang festgesetzt werden mufs zwischen dem Drehungssinn der Bewegung und dem Richtungssinn der Drehungsaxe.

So lange man es nur mit Drehungen um eine feste Axe oder um mehrere feste parallele Axen zu thun hat, kommt man in Bezug auf die Eindeutigkeit der Aussagen damit aus, dafs man den einen Drehungssinn als positiv, den anderen als negativ bezeichnet, die

Wurzel ϑ also als algebraische Gröfse ansieht, deren Vorzeichen in jedem einzelnen Falle bestimmt werden kann. Der Rotationsaxe hat man dabei keine besondere Pfeilrichtung zuzuschreiben. Anders wenn es sich um Drehungen handelt, welche beliebig gerichteten Axen im Raume angehören können, wie in unserem Falle. Mehrere unendlich kleine Drehungen (folglich auch Rotationsgeschwindigkeiten, welche aus jenen entstehen, wenn man sie durch das Zeitelement dividirt, in welchem sie zu Stande kamen) bringen, auf denselben Bereich wirkend, ein Resultat der Verrückung hervor, welches den Gesetzen der geometrischen Addition entspricht, auch läfst sich das Resultat einer einzigen Drehung erreichen durch Superposition mehrerer anderer um bestimmte Axen, z. B. um die Coordinataxen. Letztere Behauptung können wir mit Hülfe des in § 8 erkannten Gesetzes direct beweisen. Die Drehung, welche in Gleichungen (11) definirt ist, kann man auffassen als Superposition folgender drei Drehungen:

$$\left.\begin{array}{lll} \xi_1 = 0 & \xi_2 = +\mu z & \xi_3 = -\nu y \\ \eta_1 = -\lambda z & \eta_2 = 0 & \eta_3 = +\nu x \\ \zeta_1 = +\lambda y & \zeta_2 = -\mu x & \zeta_3 = 0. \end{array}\right\} \quad (11\text{e})$$

Die erste mit den Indices 1 findet statt um die x-Axe, die zweite um die y-, die dritte um die z-Axe; die Addition $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ liefert das ξ in Gleichung (11), ebenso $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = \eta$ und $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = \zeta$; unendlich kleine Drehungen verhalten sich daher ganz wie gerichtete Strecken im Raume, die Ausdrücke (11c und d) gleichen auch formal denjenigen, welche Richtung und Länge einer

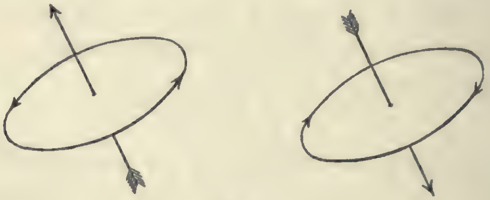

Fig. 1.

Strecke angeben, deren Projectionen auf die Coordinataxen durch λ, μ, ν bezeichnet werden. Der kleine Drehungswinkel ϑ ist dann die Intensität des Vectors, also ein absoluter Betrag, eine der beiden entgegengesetzten Richtungen der Drehungsaxe ist die Pfeilrichtung des Vectors. Welche man wählt, ist dabei zu Anfang willkürlich, doch mufs man für alle Drehungen an ein und derselben Regel festhalten; hier soll folgende Regel befolgt werden: Führt man den ausgestreckten rechten Arm von rechts nach vorn, so beschreibt man eine Drehung, deren Axenrichtung von den Füfsen zum Kopfe zeigt. Derselbe Zusammenhang wird in den perspectivischen Figuren 1 veranschaulicht, die wohl nun ohne weitere Erläuterung verständlich sind. Für die Rotation der Erde beispielsweise ist der Pfeil der Drehungsaxe nach unserer Festsetzung vom Südpol nach dem Nordpol gerichtet.

Unser Coordinatensystem wollen wir dieser Wahl entsprechend so einrichten, dafs bei Festsetzung der cyklischen Reihenfolge $xyzxy\ldots$ jede positive Coordinataxe als Pfeil eine Dre hunganzeigt, welche die nächst folgende durch einen rechten Winkel in die dritte Richtung überführt. Dies erreicht man beispielsweise, wenn man x nach rechts, y nach vorn, z nach oben positiv rechnet. Befolgt man diese Regeln, so erhält man für die Cosinus der Pfeilrichtung der Drehungsaxe in den Ausdrücken (11c) die richtigen Werthe, wenn man auch dort die Quadratwurzel absolut rechnet, jene Cosinus also gleichstimmig mit den Coefficienten λ, μ, ν. Dies ist aber nur eine Folge des besonderen Ansatzes der Anfangsgleichungen (10). Die Drehung nämlich hätte man auch absondern können, und dieselben doppeldeutigen Gleichungen (11c und d) hätte man gefunden, wenn man den Coefficienten λ, μ, ν in den 9 Gleichungen (10) durchweg entgegengesetztes Vorzeichen gegeben hätte. Die besondere Wahl, dafs dort $a_2 = n - \nu$, $b_1 = n + \nu$ und nicht umgekehrt $a_2 = n + \nu$, $b_1 = n - \nu$ gesetzt worden ist, hat also besondere Beziehung zu unseren eben gemachten Festsetzungen. Am deutlichsten sieht man das in der Zerlegung (11e). Bei der Drehung $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ um die x-Axe wird ein Punkt mit positiven y und z so verschoben, dafs sich bei positivem Coefficienten λ die y-Abmessung verkürzt, die z-Abmessung verlängert; dies zeigt eine Drehung an, welche durch einen Rechten fortgesetzt die $+y$-Richtung in die $+z$-Richtung überführt, der Pfeil der Drehungsaxe zeigt also in der Richtung der positiven x-Axe, bei negativem Coefficienten λ ist die Drehung entgegengesetzt, der Pfeil weist in Richtung der negativen x-Axe. Ganz ebenso sieht man, dafs für die Drehung $\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2$ der Pfeil bei positivem μ der positiven y-Axe, bei negativem μ der negativen y-Axe folgt, und entsprechend für die letzte Componente um die z-Axe.

§ 10. Haupt-Dilatationen.

Die bisher unberücksichtigte andere Deformation, welche durch die Coefficienten (10c) definirt ist, mufs nun, gereinigt von der im vorigen Paragraphen betrachteten Drehung des Bereiches, noch jede wahre Formänderung, welche überhaupt bei unseren Voraussetzungen möglich ist, darzustellen vermögen, denn sie wurde direct aus den allgemeinen Grundgleichungen (7) gewonnen. Die Coefficienten sind jetzt nicht mehr 9 willkürliche Zahlen a_1 bis c_3, vielmehr erscheint die Deformation durch die 6 Daten $a\ b\ c\ l\ m\ n$ in der aus (10 c) zu erkennenden Anordnung bestimmt. Man kann mit anderen Worten dafür sagen: Sobald man aus einer linearen Deformation die darin enthaltene Drehung abgesondert hat, oder falls gar keine Drehung darin steckt, so ist die Determinante der Coefficienten symmetrisch um die Diagonale, d. h. $c_2 = b_3, a_3 = c_1, b_1 = a_2$. Die Verrückungscomponenten sind:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= ax + ny + mz \\ \eta &= nx + by + lz \\ \zeta &= mx + ly + cl. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Der Ausdruck (9) für die verhältnifsmäfsige Längenänderung des Radius vector ist hier im Allgemeinen von Null verschieden, zeigt also eine wahre Verzerrung des Massenbereiches an, deren nähere Eigenthümlichkeiten wir nun aufsuchen wollen.

Wir knüpfen die Discussion an die Frage: Giebt es in dem Bereich gewisse Massenpunkte, welche in Richtung ihrer eigenen Radii vectores verschoben werden, deren Radii vectores also bei der Deformation ihre Richtung nicht ändern, sondern nur ihre Länge? Für solche Massenpunkte mufs die Proportionsfolge gelten:

$$\xi : \eta : \zeta = x : y : z.$$

Suchen wir also solche Punkte, so müssen wir mit Hülfe eines unbestimmten unendlich kleinen Zahlenfactors σ folgende Gleichungen ansetzen:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \sigma \cdot x \\ \eta &= \sigma \cdot y \\ \zeta &= \sigma \cdot z \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

und diese in die Deformationsgleichungen (12) aufnehmen. Dadurch werden in (12) die ξ, η, ζ eliminirt und man erhält folgende Bedingungsgleichungen für die Bejahung der aufgeworfenen Frage:

$$\left.\begin{aligned} (a-\sigma)\cdot x + n\cdot y + m\cdot z &= 0 \\ n\cdot x + (b-\sigma)\cdot y + l\cdot z &= 0 \\ m\cdot x + l\cdot y + (c-\sigma)\cdot z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13\,a)$$

Es ist vortheilhaft, gleich hier darauf hinzuweisen, daſs man zu denselben Bedingungsgleichungen geführt wird, wenn man diejenigen Massenpunkte x, y, z sucht, für welche die relative Längenänderung des Radius vector, nämlich ϱ/r ein Grenzwerth: Maximum, Minimum oder Sattelwerth ist. Diese Betrachtung ist mathematisch vollkommen dieselbe, welche im ersten Bande dieser Vorlesungen[1] zur Kenntniſs der Hauptträgheitsmomente eines starren Massensystems führte.

Nennt man die echten Brüche, welche die Richtungscosinus von r darstellen: $x/r = \alpha$, $y/r = \beta$, $z/r = \gamma$, so ist nach Gleichung (9a):

$$\frac{\varrho}{r} = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2l\beta\gamma + 2m\gamma\alpha + 2n\alpha\beta.$$

Wenn wir die Grenzwerthe von ϱ/r suchen, so haben wir die Variation des Ausdruckes gleich Null zu setzen unter der Nebenbedingung, daſs die Summe der drei Cosinusquadrate

$$1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

bei dieser Variirung nicht geändert wird, daſs also die Variation dieses Ausdruckes ebenfalls gleich Null ist. Wir erhalten so die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\delta\left(\frac{\varrho}{r}\right) = {} & 2a\alpha\cdot\delta\alpha + 2b\beta\cdot\delta\beta + 2c\gamma\cdot\delta\gamma \\
& + 2l\gamma\cdot\delta\beta + 2l\beta\cdot\delta\gamma \\
& + 2m\gamma\cdot\delta\alpha + 2m\alpha\cdot\delta\gamma \\
& + 2n\beta\cdot\delta\alpha + 2n\alpha\cdot\delta\beta = 0 \\
\delta(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = {} & 2\alpha\cdot\delta\alpha + 2\beta\cdot\delta\beta + 2\gamma\cdot\delta\gamma = 0.
\end{aligned}$$

Den gemeinsamen Factor 2 kann man in beiden Gleichungen wegen der Null rechts löschen, ferner kann man die beiden Aussagen in eine einzige zusammenfassen ohne sie zu vermischen, wenn man der einen von ihnen einen unbestimmten Multiplicator auf den Weg giebt. Wir wollen also die zweite mit einem unbestimmten Factor $-\sigma$ erweitern und beide addiren, dann erhält man die Bedingung:

$$\begin{aligned}
& \{(a-\sigma)\cdot\alpha + n\beta + m\gamma\}\delta\alpha \\
+ & \{(n\alpha + (b-\sigma)\beta + l\gamma\}\delta\beta \\
+ & \{(m\alpha + l\beta + (c-\sigma)\gamma\}\delta\gamma = 0.
\end{aligned}$$

---

[1] Bd. I, § 46, S. 175 und folgende.

Diese Gleichung kann bei beliebigen Variationen $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ offenbar nur erfüllt werden, wenn jede der drei geschweiften Klammern für sich gleich Null ist. Wir erhalten so drei Gleichungen, welche nach Erweiterung mit r identisch sind mit den Gleichungen (13a), zu welchen wir nun zurückkehren wollen.

Da diese linear und homogen sind, geben sie nur in dem Falle von Null verschiedene Wurzeln, dafs ihre Determinante verschwindet. Wir müssen also fordern, dafs die Bedingung erfüllt ist:

$$\begin{vmatrix} a-\sigma & n & m \\ n & b-\sigma & l \\ m & l & c-\sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{13b}$$

Aufgeschlossen liefert diese Determinante folgende cubische Gleichung für das noch unbestimmte σ:

$$\sigma^3 - (a+b+c)\sigma^2 + (bc+ca+ab-l^2-m^2-n^2)\sigma - \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix} = 0. \tag{13c}$$

Da diese Gleichung reelle Coefficienten hat, mufs wenigstens eine reelle Wurzel σ existiren; wir werden nachher sehen, dafs sie nothwendig zu jener Gattung gehört, welche drei reelle Wurzeln besitzt. Bis wir dies bewiesen haben, wollen wir die Betrachtung auf solche Fälle beschränken, in denen es zutrifft, nachher werden wir dann eben bemerken, dafs es der allgemeine Fall ist.

Wir nennen die drei reellen Wurzeln σ_1, σ_2, σ_3 und nehmen sie zunächst auch alle von verschiedener Gröfse an. Jeder von ihnen entspricht ein besonderes System von Lösungen der Gleichungen (13a); wir bezeichnen die Wurzeln mit entsprechenden Indices

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3. \end{matrix}$$

Wegen der Homogeneität der Gleichungen werden nicht die absoluten Werthe der Coordinaten bestimmt, sondern nur ihre Gröfsenverhältnisse, also nicht drei einzelne Punkte, sondern drei Richtungen im Raume, drei gerade Linien, die durch den Ausgangspunkt gehen. (Diese 9 Unbekannten können z. B. direct aufgefafst werden als die Cosinus der Winkel, welche drei Richtungen 1, 2, 3 mit den Axen x, y, z bilden.

Wir wollen nun nachweisen, dafs diese drei Richtungen auf einander senkrecht stehen müssen. Setzen wir in Gleichungen (13a) z. B. das System von Lösungen mit dem Index 1 ein, und schaffen die mit σ_1 behafteten Theile nach rechts, so erhalten wir die drei Identitäten:

$$
\begin{aligned}
a x_1 + n y_1 + m z_1 &= \sigma_1 x_1 \\
n x_1 + b y_1 + l z_1 &= \sigma_1 y_1 \\
m x_1 + l y_1 + c z_1 &= \sigma_1 z_1 .
\end{aligned}
$$

Diese erweitern wir mit den entsprechenden Coordinaten einer der beiden anderen Lösungen, also etwa die erste mit x_2, die zweite mit y_2, die dritte mit z_2, und addiren dann alle drei Gleichungen. So findet man:

$$
\begin{aligned}
\{a x_1 x_2 + b y_1 y_2 + c z_1 z_2 + l(y_1 z_2 + y_2 z_1) + m(z_1 x_2 + z_2 x_1) + n(x_1 y_2 + x_2 y_1)\} \\
= \sigma_1 \cdot \{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\}.
\end{aligned}
$$

Die links und rechts in geschweifte Klammern eingeschlossenen Gröfsen bleiben ungeändert, wenn man die Indices 1 und 2 vertauscht, man würde daher für sie dieselben Ausdrücke gefunden haben, wenn man zuerst das Lösungssystem σ_2, x_2, y_2, z_2 in die Gleichungen (13a) eingesetzt und dann mit x_1, y_1, z_1 erweitert haben würde; die durch Addition alsdann gefundene Gleichung würde sich von der vorstehenden nur dadurch unterscheiden, dafs rechts statt σ_1 die andere Wurzel σ_2 steht. Denken wir uns diese Gleichung ebenfalls gebildet und von der vorstehenden subtrahirt; die identischen linken Seiten heben sich alsdann auf und man erhält:

$$
0 = (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\}. \tag{13d}
$$

So lange wir den besonderen Fall ausschliefsen, dafs die cubische Gleichung mehrere einander gleiche Wurzeln besitzt, fordert diese Gleichung:

$$
x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.
$$

Das ist aber die Bedingung dafür, dafs die Radii vectores r_1 und r_2 auf einander senkrecht stehen. Das gleiche Resultat würde sich natürlich ergeben haben, wenn wir die Lösungen 2 und 3 oder 3 und 1 in der auseinandergesetzten Weise combinirt hätten.

Wir gelangen also zu folgendem Schlusse: Wenn die cubische Gleichung drei verschiedene reelle Wurzeln besitzt, so existiren drei bestimmte auf einander senkrechte Richtungen in dem Massenbereich, welche durch die Deformation nicht verändert werden, d. h. es gehen durch den Ausgangspunkt drei aufeinander senkrechte Gerade, deren Massenpunkte in Richtung eben dieser Geraden verschoben werden, so dafs diese Massenlinien nur gedehnt oder zusammengedrückt werden, ohne aber ihre Richtung zu ändern. Aus dem Umstand, dafs die Frage nach den Punkten, für welche ϱ/r ein Grenzwerth ist, auf dieselben Bedingungsgleichungen führt, folgt noch, dafs die relativen Verlängerungen in diesen drei ausgezeichneten Richtungen zugleich Grenzwerthe dieser Gröfse darstellen. Der gröfsten Wurzel σ entspricht die gröfste Dehnung, der mittleren ein Sattelwerth, der kleinsten die kleinste Dehnung. Zusammendrückung ist dabei als negative Dehnung anzusehen, und wird durch negative Wurzelwerthe angezeigt. (Negative Gröfsen sind kleiner als positive.) Da wir nun in § 6 schon erkannten, dafs eine materielle Kugel bei der Deformation im Allgemeinen in ein Ellipsoid übergeht, so folgt nun direct, dafs die eben gefundenen drei besonderen Richtungen die Hauptaxen dieses Ellipsoides anzeigen. War der Radius der Kugel gleich 1, so sind die halben Längen der Hauptaxen $(1 + \sigma_1)$, $(1 + \sigma_2)$, $(1 + \sigma_3)$. Deshalb sollen die drei Wurzeln σ die drei Haupt-Dilatationen genannt werden, dieses Wort wieder im algebraischen Sinne aufgefafst, und die dazu gehörigen, auf einander senkrechten Richtungen die Haupt-Dilatationsaxen.

Wir müssen nun noch nachweisen, dafs die gemachte Annahme dreier reeller Wurzeln keine Beschränkung ist, sondern in allen Fällen zutrifft, wie auch die Deformationsdaten $a\ b\ c\ l\ m\ n$ gewählt sein mögen. Zu diesem Zwecke wollen wir die entgegengesetzte Annahme ad absurdum führen. Existiren zwei complexe Wurzeln, so müssen diese nothwendig conjugirt sein:

$$\sigma_1 = \eta + i\,\vartheta$$
$$\sigma_2 = \eta - i\,\vartheta.$$

Dann werden aber auch x_1 und x_2, y_1 und y_2, z_1 und z_2 Paare von conjugirten Complexen:

$$x_1 = u + i\,v$$
$$x_2 = u - i\,v \quad \text{etc.}$$

Daraus folgt

$$x_1 \cdot x_2 = u^2 + v^2 \quad \text{etc.}$$

Der Ausdruck $x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2$ wird dann als Summe von 6 Quadraten reeller Gröfsen wesentlich positiv und niemals gleich

Null sein. Die Gleichung (13 d) kann in diesem Falle nur dadurch befriedigt werden, dafs $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ ist, d. h. aber, dafs $\vartheta = 0$ ist, dafs der imaginäre Bestandtheil in σ_1 und σ_2 also verschwindet. Complexe Wurzeln sind also ausgeschlossen.

Dagegen ist die andere bisher gemachte Annahme, dafs die drei Wurzeln alle von einander verschieden seien, nicht nothwendig erfüllt; es können Fälle vorkommen, in denen zwei Wurzeln oder gar alle drei Wurzeln identisch werden. Solche Fälle wollen wir nun betrachten. Wir nehmen an, die cubische Gleichung (13 a), welche wir der Kürze halber $S = 0$ schreiben, habe zwei gleiche Wurzeln $\sigma_1 = \sigma_2$, dagegen sei σ_3 von jenen verschieden. Man kann dann, wie vorher gezeigt, beweisen, dafs die zu σ_3 gehörige Richtung senkrecht steht sowohl auf der Richtung von σ_1, wie auf der Richtung von σ_2, dagegen läfst sich das für die Richtungen σ_1 und σ_2 unter einander nicht mehr beweisen, weil in Gleichung (13d) der Factor $(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$ ist, also

$$\{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\}$$

unbestimmt bleibt.

Für die Coefficienten des Polynoms S, also auch für die Daten $a\ b\ c\ l\ m\ n$ mufs offenbar eine gewisse Beziehung bestehen, sie können nicht mehr so frei gewählt werden, wenn man wünscht, dafs eine Doppelwurzel auftreten soll. Als einfachste Form dieser Beziehung findet man den Satz, dafs eine Doppelwurzel der Gleichung $S = 0$ zugleich einfache Wurzel der um einen Grad niedrigeren Gleichung

$$\frac{dS}{d\sigma} = 0$$

ist. Der Beweis ist leicht. Zunächst kann man in jedem Falle das Polynom S darstellen in der Form:

$$S = (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)$$

folglich

$$\frac{dS}{d\sigma} = (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2).$$

Ist nun $\sigma_2 = \sigma_1$, so wird $(\sigma - \sigma_1)$ gemeinsamer Factor aller drei Summanden des Ausdruckes $dS/d\sigma$, dieser verschwindet also, wenn man die Variabele $\sigma = \sigma_1$ setzt, d. h. die Doppelwurzel σ_1 der cubischen Gleichung ist einfache Wurzel der durch Differentiation daraus abgeleiteten quadratischen Gleichung. Dafs dieser Satz eine Beziehung zwischen den Deformationsgröfsen bedeutet, leuchtet ein.

Denn die Coefficienten der cubischen Gleichung sind in gesetzmäfsiger Weise aus $a\ b\ c\ l\ m\ n$ gebildet; die Wurzeln sind wiederum in gesetzmäfsiger Weise aus den Coefficienten der Gleichung zu bilden, also schliefslich als drei ganz fest gestaltete Functionen der 6 Gröfsen $a\ b\ c\ l\ m\ n$ anzusehen. Ebenfalls gesetzmäfsig aus den 6 Gröfsen zusammengesetzt sind auch die Coefficienten von $dS/d\sigma$. Hat man also den Fall einer Doppelwurzel $\sigma_1 = \sigma_2$, so denke man diese in $a\ b\ c\ l\ m\ n$ ausgedrückt und für die Variabele σ in den Differentialquotient eingesetzt. Es ist dann

$$\left(\frac{dS}{d\sigma}\right)_{\sigma=\sigma_1} \equiv 0$$

eine Gleichung, die nur aus den 6 Deformationsgröfsen besteht, also thatsächlich eine Beziehung anzeigt, die im Falle einer Doppelwurzel erfüllt sein mufs.

Das Verschwinden der Determinante, also die Gleichung $S = 0$ war die nothwendige Bedingung dafür, dafs die drei homogenen linearen Gleichungen (13a) überhaupt von Null verschiedene Lösungen für x, y, z liefern. Zur Bestimmung der Gröfsenverhältnisse zwischen x, y, z genügen dann aber zwei von jenen drei Gleichungen, welche man nach Belieben auswählen kann, die dritte, welche man nicht benützt, läfst sich aus den beiden gewählten als nothwendige Folgerung herleiten. Die hinzutretende weitere Bedingung $dS/d\sigma = 0$ sagt nun aus, dafs, wenn man in die zwei ausgewählten homogenen Gleichungen die Doppelwurzel $\sigma_1 = \sigma_2$ einsetzt, diese beiden Gleichungen nicht mehr unabhängig sind, sondern dafs die eine aus der anderen abgeleitet werden kann. Wenn aber eine einzelne Bestimmungsgleichung die Folge einer einzelnen anderen für dieselben Unbekannten gültigen Bestimmungsgleichung ist, so können sich beide nur durch ihre äufsere Form, nicht aber durch ihren Inhalt unterscheiden. Da nun beide homogen und linear in x, y, z sind, so kann der Unterschied nur in irgend einem durchgehenden Zahlenfactor bestehen, den man auch wegheben kann, um beide vollkommen identisch zu machen. Da nun endlich die Wahl der zwei Gleichungen aus den drei vorliegenden willkürlich ist, so sieht man, dafs nach Einsetzung der Doppelwurzel in die drei homogenen Gleichungen nicht nur aus der Combination je zweier die dritte gefolgert werden kann, sondern dafs aus jeder einzelnen die beiden anderen hergeleitet werden können (und zwar einfach durch Erweiterung mit passenden Zahlenfactoren). Bei Einsetzung der Doppelwurzel werden also alle drei Gleichungen identisch, sie sagen nicht mehr aus, als eine von ihnen. Bestimmte Gröſsenverhältnisse zwischen x, y, z, also eine bestimmte Richtung im Raume kann man aus einer einzelnen linearen homogenen Gleichung nicht finden, eine solche definirt vielmehr nur eine bestimmte, durch den Ausgangspunkt gelegte Ebene, für deren sämmtliche Massenpunkte die Forderung erfüllt ist, welche zur Aufstellung der Gleichungen (13) führte. Alle in dieser Ebene gelegenen Massenpunkte erfahren die gleiche reine Dilatation ihrer Radii vectores. Eine Bevorzugung zweier bestimmter, auf einander senkrechter Richtungen in dieser Ebene, entsprechend den beiden gleichen Haupt-Dilatationen σ_1 und σ_2 ist durch die Natur der Deformation nicht bedingt, doch kann man, wo es erwünscht ist, zwei solche Richtungen beliebig festsetzen, ohne die Allgemeinheit der Betrachtung zu stören. Eine in dem Massenbereich abgegrenzte Kugel geht über in ein Rotationsellipsoid, die soeben gefundene Ebene bezeichnet den Aequator, die darauf senkrechte Richtung, welche der dritten Wurzel σ_3 angehört, die Rotationsaxe.

Tritt endlich der Fall ein, daſs alle drei Wurzeln σ einander gleich sind, so findet man überhaupt keine bevorzugten Richtungen in dem deformirten Bereich, die Radii vectores sämmtlicher Massenpunkte erfahren dann die gleiche reine Dilatation ohne Aenderung ihrer Richtung. Eine Kugel bleibt dabei kugelförmig. Man kann in diesem Falle drei beliebige auf einander senkrechte Richtungen als Axen dreier gleicher Haupt-Dilatationen festsetzen, wo dies erwünscht ist.

§ 11. Synthese der allgemeinen Deformation.

Im vorigen Paragraphen wurde die allgemeinste wahre Deformation, welche durch die Gleichungen (12) dargestellt ist, analysirt. Das Resultat war die Auffindung der drei auf einander senkrechten Haupt-Dilatationen, in deren Richtungen reine Dehnung (positive oder negative) ohne Ablenkung eintritt und zugleich Grenzwerthe des numerischen Betrages der Dehnung herrschen. Jetzt soll der umgekehrte Weg eingeschlagen werden. Es sollen drei auf einander senkrechte reine Dehnungen (zunächst von verschiedener Gröſse) in dem Massenbereich superponirt werden und gezeigt werden, daſs diese, bezogen auf ein beliebig gegen jene Hauptrichtungen orientirtes Coordinatensystem, zu den allgemeinen Deformationsgleichungen (12) führen. Wir wählen einen Ausgangspunkt und legen durch ihn drei aufeinander senkrechte Axen, die Abmessungen eines Massenpunktes in diesem Axensystems seien bezeichnet durch $x' y' z'$. Nun nehmen wir mit dem Bereich eine reine Dehnung in der x'-Richtung vor, der Betrag sei σ_1, das heifst für die Verrückungen $\xi' \eta' \zeta'$ sollen die Vorschriften gelten:

$$\xi' = \sigma_1 x', \quad \eta' = 0, \quad \zeta' = 0.$$

Darauf dehnen wir in der y'-Richtung um d n Betrag σ_2. Dabei ist:

$$\xi' = 0, \quad \eta' = \sigma_2 y', \quad \zeta' = 0.$$

Endlich dehnen wir in der z'-Richtuug um den Betrag σ_3. Dabei ist:

$$\xi' = 0, \quad \eta' = 0, \quad \zeta' = \sigma_3 z'.$$

Nach dem Gesetz der ungestörteu Superposition ist das Resultat dieser drei Deformationen dasselbe, welches man erhalten hätte, wenn man eine einzige Deformation nach der complicirteren Vorschrift

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \sigma_1 x' \\ \eta' &= \sigma_2 y' \\ \zeta' &= \sigma_3 z' \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

ausgeführt hätte. Für jeden Massenpunkt findet man durch geometrische Addition der drei auf einander senkrechten kleinen Strecken $\xi' \eta' \zeta'$ dessen resultirende Verrückung. Letztere soll nun in Richtung dreier beliebig gegen die Haupt-Dilatationsaxen orientirten Coordinataxen x, y, z in Componenten zerlegt werden. Der Anfangspunkt dieses Coordinatensystems soll in demselben als Ausgangspunkt bezeichneten Massenpunkt liegen. Die Cosinus der Winkel zwischen den positiven Axenrichtungen beider Systeme wollen wir kurz bezeichnen, wie aus folgender Tabelle zu ersehen ist:

	x'	y'	z'
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

(14a)

also beispielsweise $\cos(x' y) = \beta_1$, $\cos(z' x) = \alpha_3$.

Die Componente ξ findet man als algebraische Summe der drei Projectionen von $\xi' \eta' \zeta'$ auf die x-Axe, die algebraischen Werthe dieser Projectionen wiederum findet man durch Multiplication der Strecken $\xi' \eta' \zeta'$ mit den Cosinus der Richtungsunterschiede. Es ist also:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \alpha_1 \xi' + \alpha_2 \eta' + \alpha_3 \zeta' \\
\eta &= \beta_1 \xi' + \beta_2 \eta' + \beta_3 \zeta' \\
\zeta &= \gamma_1 \xi' + \gamma_2 \eta' + \gamma_3 \zeta'
\end{aligned}\right\} \tag{14b}$$

oder nach den Gleichungen (14)

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \alpha_1 \sigma_1 x' + \alpha_2 \sigma_2 y' + \alpha_3 \sigma_3 z' \\
\eta &= \beta_1 \sigma_1 x' + \beta_2 \sigma_2 y' + \beta_3 \sigma_3 z' \\
\zeta &= \gamma_1 \sigma_1 x' + \gamma_2 \sigma_2 y' + \gamma_3 \sigma_3 z'.
\end{aligned}\right\} \tag{14c}$$

Statt der hier vorkommenden Abmessungen $x' y' z'$ des beobachteten Massenpunktes können wir nun dessen Coordinaten $x y z$ in dem von uns gewählten System einführen. Die Ausdrücke für $x' y' z'$ werden ebenfalls mit Hülfe jener 9 Cosinus gefunden:

$$\left.\begin{aligned}
x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\
y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\
z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z.
\end{aligned}\right\} \tag{14d}$$

Setzt man diese in (14b) ein und ordnet die Ausdrücke nach den Factoren x, y, z, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\xi = {} & (\alpha_1^2\sigma_1 + \alpha_2^2\sigma_2 + \alpha_3^2\sigma_3)x + (\alpha_1\beta_1\sigma_1 + \alpha_2\beta_2\sigma_2 + \alpha_3\beta_3\sigma_3)y \\
& + (\gamma_1\alpha_1\sigma_1 + \gamma_2\alpha_2\sigma_2 + \gamma_3\alpha_3\sigma_3)z \\
\eta = {} & (\alpha_1\beta_1\sigma_1 + \alpha_2\beta_2\sigma_2 + a_3\beta_3\sigma_3)x + (\beta_1^2\sigma_1 + \beta_2^2\sigma_2 + \gamma_3^2\sigma_3)y \\
& + (\beta_1\gamma_1\sigma_1 + \beta_2\gamma_2\sigma_2 + \beta_3\gamma_3\sigma_3)z \\
\zeta = {} & (\gamma_1\alpha_1\sigma_1 + \gamma_2\alpha_2\sigma_2 + \gamma_3\alpha_3\sigma_3)x + (\beta_1\gamma_1\sigma_1 + \beta_2\gamma_2\sigma_2 + \beta_3\gamma_3\sigma_3)y \\
& + (\gamma_1^2\sigma_1 + \gamma_2^2\sigma_2 + \gamma_3^2\sigma_3)z.
\end{aligned}\right\} \tag{14e}$$

Dies ist das Schlufsresultat der Rechnung, die Verrückungscomponenten ξ, η, ζ sind darin ausgedrückt als Functionen der Ortscomponenten x, y, z, beide bezogen auf dasselbe beliebig gewählte Coordinatensystem. Wenn also die Superposition der drei auf einander senkrechten Hauptdilatationen die allgemeinste Deformation liefert, so müssen die Gleichungen (14e) übereinstimmen mit den Gleichungen (12). Dies ist nun wirklich der Fall, sobald man setzt:

$$\left.\begin{aligned}
a &= \sum_{1,2,3} \alpha_1^2 \sigma_1 & l &= \sum \beta_1 \gamma_1 \sigma_1 \\
b &= \sum \beta_1^2 \sigma_1 & m &= \sum \gamma_1 \alpha_1 \sigma_1 \\
c &= \sum \gamma_1^2 \sigma_1 & n &= \sum \alpha_1 \beta_1 \sigma_1 .
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Die durch die Summenzeichen abgekürzte Schreibweise ist nach folgendem Beispiel zu verstehen:

$$\sum \alpha_1^2 \sigma_1 = \alpha_1^2 \sigma_1 + \alpha_2^2 \sigma_2 + \alpha_3^2 \sigma_3$$
$$\sum \beta_1 \gamma_1 \sigma_1 = \beta_1 \gamma_1 \sigma_1 + \beta_2 \gamma_2 \sigma_2 + \beta_3 \gamma_3 \sigma_3 .$$

Sind $a\,b\,c\,l\,m\,n$ vorgeschrieben, so hat man in (15) 6 Bestimmungsgleichungen für die drei Hauptdilatationen $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$ und die 9 Richtungscosinus. Zwischen letzteren bestehen aber bekanntlich sechs unabhängige Relationen, z. B. folgende:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \sum_{1,2,3} \alpha_1^2 & 0 &= \sum \beta_1 \gamma_1 \\ 1 &= \sum \beta_1^2 & 0 &= \sum \gamma_1 \alpha_1 \\ 1 &= \sum \gamma_1^2 & 0 &= \sum \alpha_1 \beta_1 . \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Im Ganzen hat man also 12 Gleichungen für 12 Unbekannte, oder wenn man die 6 Relationen (16) benützt, um die 9 Cosinus auf drei unbekannte Gröfsen zu reduciren, so hat man die 6 Gleichungen (15) für 6 Unbekannte, jedenfalls also vollständiges Material. Die Aufgabe haben wir aber bereits im vorigen Paragraphen auf andere Weise gelöst, die Bezeichnungen unterscheiden sich nur in dem unwesentlichen Umstand, dafs dort die Verhältnisse der Coordinaten $x_1 : y_1 : z_1$, $x_2 : y_2 : z_2$, $x_3 : y_3 : z_3$ der in den Haupt-Dilatationsaxen gelegenen Massenpunkte bestimmt wurden, während hier direct die Richtungscosinus der Hauptaxen dafür eingeführt sind. Von Nutzen sind aber die Gleichungen (15) in dem umgekehrten Falle, dafs man die drei Haupt-Dilatationen und deren Richtungen vorgeschrieben hat, und nun nach den 6 Deformationscoefficienten in Gleichungen (12) fragt.

Wir sahen im vorigen Paragraphen, dafs in dem Falle zweier gleicher Wurzeln $\sigma_1 = \sigma_2$ die Richtungen dieser beiden Haupt-Dilatationen unbestimmt werden, dass sie nur in einer Ebene liegen müssen senkrecht zur Axe der dritten davon verschiedenen Dilatation σ_3. In den Gleichungen (15) mufs sich diese Eigenthümlichkeit darin ausdrücken, dafs die mit den Indices 1 und 2 behafteten Richtungscosinus nicht zur Werthbestimmung der 6 Coefficienten beitragen, sondern dafs nur $\alpha_3\, \beta_3\, \gamma_3$ Einflufs behalten. Man findet denn auch für $\sigma_2 = \sigma_1$ aus Gleichung (15)

$$a = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\,\sigma_1 + \alpha_3^2 \sigma_3 \qquad l = (\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2)\,\sigma_1 + \beta_3 \gamma_3 \sigma_3 .$$

Aus (16) folgt aber:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 - \alpha_3^2 \qquad \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 = - \beta_3 \gamma_3 .$$

Mithin:

$$\left.\begin{array}{ll} a = \sigma_1 + \alpha_3^2 \cdot (\sigma_3 - \sigma_1) & l = \beta_3 \gamma_3 (\sigma_3 - \sigma_1). \\ \text{Ganz analog:} & \\ b = \sigma_1 + \beta_3^2 \cdot (\sigma_3 - \sigma_1) & m = \gamma_3 \alpha_3 (\sigma_3 - \sigma_1) \\ c = \sigma_1 + \gamma_3^2 \ (\sigma_3 - \sigma_1) & n = \alpha_3 \beta_3 (\sigma_3 - \sigma_1). \end{array}\right\} \quad (15a)$$

Hat man endlich drei gleiche Wurzeln $= \sigma_1$, so fallen sämmtliche 9 Cosinus aus den Bestimmungen fort und man erhält für diesen Fall:

$$a = b = c = \sigma_1, \qquad l = m = n = 0. \qquad (15b)$$

§ 12. Volum-Dilatation.

Das Wesen einer jeden kleinen Deformation ist nach den gemachten Betrachtungen jetzt vollkommen deutlich, man gewinnt eine erschöpfende und zugleich anschauliche Vorstellung derselben, wenn man aus dem Gebiete eine Kugel herausgeschnitten denkt und mit dieser das Ellipsoid vergleicht, welches daraus bei der Deformation entsteht. Man kann an verschiedenen Stellen der Substanz eine ganze Schaar gleicher Kugeln abgegrenzt denken. Soweit der Bereich als „klein" gelten darf, d. h. so lange die Verrückungen lineare Functionen der Coordinaten mit constanten Deformationscoefficienten sind, sind dann auch die sämmtlichen Ellipsoide congruent und ihre Hauptaxen gleichgerichtet. Es ist klar, dafs man das Anschauungsmittel dieser Kugeln und Ellipsoide auch verwenden kann bei den ungleichmäfsigen Deformationen gröfserer Bereiche, in denen man zur Darstellung der Verrückungen entweder höhere Potenzen der Coordinaten zu Hülfe nehmen mufs, oder den Coefficienten der linearen Ausdrücke für verschiedene Stellen auch verschiedene Werthe beilegen mufs. Jedenfalls giebt das Bild der Kugel und des Ellipsoids an jeder Stelle die dort bestehende Deformation vollkommen an.

Bisher haben wir unsere Aufmerksamkeit auf die Dilatation von Strecken, also auf die Veränderung der Abstände je zweier Punkte der Masse gerichtet. Wir fanden dabei im Allgemeinen Aenderung sowohl der Länge wie auch Richtung dieser Strecken. Nur in drei auf einander senkrechten ausgezeichneten Richtungen fielen die letzteren Veränderungen weg und zeigten zugleich die ersteren Grenzwerthe. Das gleiche Verhalten würden wir nun finden, wenn wir zur Betrachtung von Flächenstücken übergehen würden, welche vor und nach der Deformation durch dieselben bestimmten Massenpunkte in der Substanz erkennbar gemacht sind. Diese Betrachtungen sind indessen nur in einem beschränkten Gebiet physikalischer Erscheinungen, den Oberflächengestaltungen tropfbarer Flüssigkeiten, von Wichtigkeit, und sollen hier nicht verfolgt werden. Dagegen wollen wir die Volumveränderungen abgegrenzter Massenbereiche durch Deformationen der betrachteten Art jetzt näher untersuchen. Gleich wie wir den Begriff der Längendilatation, also den Bruch ϱ/r und die gesuchten Hauptdilatationen σ definirt haben als die Verhältnifszahl der Verlängerung zur ursprünglichen Länge, so wollen wir als Begriff der Volum-Dilatation aufstellen die Verhältnifszahl des Volumzuwachses zum ursprünglichen Volumen. Soweit die Deformation gleichmäfsig ist, ist auch offenbar diese kleine Verhältnifszahl constant, bei Vergröfserung des Volumens positiv, bei Verkleinerung negativ. Ein Unterschied nach verschiedenen Richtungen kann dabei nicht auftreten, da Volumina im Gegensatz zu Strecken und ebenen Flächenstücken ungerichtete Gröfsen sind. Betrachten wir eine Kugel vom Radius r, deren Volumen ist

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 . \tag{17}$$

Diese geht über in ein Ellipsoid mit den Halbaxen $r(1+\sigma_1)$, $r(1+\sigma_2)$, $r(1+\sigma_3)$. Das Volumen des Ellipsoids ist also:

$$V' = \frac{4\pi}{3} \cdot r(1+\sigma_1) \cdot r(1+\sigma_2) \cdot r(1+\sigma_3)$$

oder nach Vernachlässigung höherer Potenzen der kleinen Zahlen σ

$$V' = \frac{4\pi}{3} r^3 (1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) . \tag{17a}$$

Die Volumdilatation, die wir ω nennen wollen, ist nach unserer Definition:

$$\omega = \frac{V' - V}{V} \tag{18}$$

und erhält nach Gleichungen (17 und 17a) den einfachen Betrag:

$$\omega = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 . \tag{18a}$$

Dieser Ausdruck gilt nicht nur für ursprünglich kugelförmige Volumina der Substanz, sondern für jede beliebige Gestalt. Will man dies ausführlich nachweisen, so denke man sich den Massenbereich durch drei Schaaren von Ebenen in hinreichend kleine rechtwinklige Parallelepipede zerschnitten, deren Kanten den Haupt-Dilatationsrichtungen der vorzunehmenden Deformation parallel sind.

Diese Raumzellen bleiben dann auch nach der Deformation rechtwinklig. Aus solchen kleinen Räumen kann man nun jede gegebene Volumgestalt mit beliebiger Annäherung zusammensetzen, und das deformirte Volumen besteht dann aus denselben Elementarräumen, welche alle in gleicher Weise deformirt sind. Die Kantenlängen der einzelnen Räume seien in der Numerirung der Haupt-Dilatationen k_1, k_2, k_3, das Volumen eines einzelnen ist dann $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$. Das beliebig abgegrenzte Volumen V enthalte N solche Raumelemente, also ist

$$V = N \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 .$$

Nach der Deformation sind die Kantenlängen der einzelnen Räume $k_1 (1 + \sigma_1)$, $k_2 (1 + \sigma_2)$, $k_3 (1 + \sigma_3)$, deren Einzelvolumina also $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 (1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)(1 + \sigma_3) = k_1 k_2 k_3 (1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ und das gesammte deformirte Gebiet besteht aus ebenfalls N solchen deformirten Raumelementen, dessen Volumen V' ist also:

$$V' = N \cdot k_1 k_2 k_3 \cdot (1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

daraus folgt nach Gleichung (18) für das beliebig gestaltete Volumen ebenfalls die räumliche Dilatation:

$$\omega = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.$$

Um nun ω durch die 6 Coefficienten der Deformation darzustellen, ist es nicht nöthig, die drei Wurzeln σ der cubischen Gleichung (13c) einzeln auszurechnen und zu addiren, denn nach einem bekannten Gesetz der algebraischen Gleichungen mufs die Summe der Wurzeln gleich dem Coefficienten von σ^2 mit entgegengesetztem Vorzeichen sein; man liest also aus jener Gleichung direct ab:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = a + b + c. \tag{18b}$$

Mithin ist die Volum-Dilatation, welche eine durch die Coefficienten $a\,b\,c\,l\,m\,n$ angegebene Deformation erzeugt:

$$\omega = a + b + c. \tag{18c}$$

Die drei Coefficienten l, m, n sind also auf diese ohne Einflufs.

Die Gleichung (18b) kann man übrigens auch ohne Benützung der cubischen Gleichung ableiten durch Addition der drei links stehenden Gleichungen (15) unter Berücksichtigung der drei links stehenden Cosinusrelationen (16).

Gehen wir noch weiter zurück auf die Bedeutung der Coefficienten a, b, c! Zum Zweck der Absonderung der Drehung zu Anfang des § 9 wurden für die früheren 9 Coefficienten der Deformation, welche in Gleichungen (7) vorkommen, andere Bezeichnungen eingeführt. Die Aenderung bezog sich aber nur auf die sechs seitwärts stehenden Gröfsen, die drei Diagonalcoefficienten a, b, c sind identisch mit den früheren $a_1\, b_2\, c_3$ geblieben. Letztere wurden aber definirt, bevor wir den Nullpunkt des Coordinatensystems an einen bestimmten Massenpunkt geheftet hatten, um gemeinsame Parallelverrückung des ganzen Bereiches aus der Betrachtung auszuscheiden. Gleichviel also, ob man durch ξ, η, ζ als lineare Functionen der festen Raumcoordinaten x, y, z eine allgemeine geordnete Verrückung eines Massenbereiches darstellt, oder ob man eine gemeinsame Translation, oder endlich noch eine gemeinsame Drehung daraus abgesondert hat, in allen Fällen behalten die drei Diagonalcoefficienten folgende ursprüngliche Bedeutungen

$$a = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \qquad b = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \qquad c = \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Die Volum-Dilatation, welche durch eine kleine geordnete Verrückung an einer Stelle eines Massenbereiches erzeugt wird, ist mithin:

$$\omega = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \tag{18d}$$

Für die Differentialquotienten sind dabei die Localwerthe einzusetzen, welche an einer bestimmten Stelle der Substanz gelten. Bei gleichförmiger Deformation kleiner Bereiche sind die Werthe an allen Stellen gleich, im Allgemeinen kann aber bei grösseren Bereichen ω an verschiedenen Orten verschieden sein.

Bei einer Deformation ändert sich im Allgemeinen sowohl das Volumen eines abgegrenzten Massenbereiches als auch dessen Gestalt, d. h. die Oberfläche des Bereiches bleibt sich nicht geometrisch ähnlich. Das Volumen bleibt erhalten nur in den besonderen Fällen, wo die Summe der drei Wurzeln σ gleich Null, also auch $a + b + c = 0$ ist; die Gestalt hingegen bleibt sich selbst geometrisch ähnlich nur in den besonderen Fällen, wo die drei Wurzeln σ alle einander gleich, also wo nach Gleichungen (15b) $a = b = c$ und $l = m = n = 0$ ist. Erstere Sonderfälle wollen wir reine Gestaltänderungen, letztere reine Volumänderungen nennen.

§ 13. Scheerungen.

Die Auflösung der allgemeinsten wahren Deformation in die drei Hauptlineardilatationen ist zwar eine erschöpfende Darstellung der Erscheinung, jedoch nicht die einzige. Es giebt eine andere Art der Zerlegung, welche eigenthümliche Vorzüge bietet, zwar nicht gerade für die analytische Behandlung, wohl aber für die Unterscheidung der physikalischen Eigenschaften zweier verschiedener Klassen von deformirbaren Körpern, der festen und der flüssigen. Diese Art der Darstellung zerlegt nämlich die allgemeine Deformation in eine reine Volumänderung (gegen welche alle Körper Widerstand leisten) und eine reine Gestaltänderung (welcher nur die festen, nicht aber die flüssigen Körper widerstehen).

Dafs eine solche Zerlegung sich stets ausführen läfst, kann man rein mathematisch leicht nachweisen. Die vorgelegte Deformation habe die Coefficienten a, b, c, l, m, n. Wir zerlegen sie in zwei andere, deren Coefficienten durch die Indices 1 und 2 charakterisirt sein mögen. Dann folgt aus dem Superpositionsprincip:

$$a = a_1 + a_2,\; b = b_1 + b_2, \cdots n = n_1 + n_2. \tag{19}$$

(6 Forderungen.)

Soll nun die Deformation (1) eine reine Volumdehnung sein, so mufs

$$a_1 = b_1 = c_1 \text{ und } l_1 = m_1 = n_1 = 0 \tag{19a}$$

(5 Forderungen.)

sein; soll die Deformation (2) eine reine Gestaltänderung sein, so mufs man fordern:

$$a_2 + b_2 + c_2 = 0. \tag{19b}$$

(1 Forderung.)

Den 12 Forderungen, welche in den Gleichungen (19) (19a) (19b) liegen, genügt man, indem man den 12 unbekannten Coefficienten folgende Beträge giebt:

$$a_1 = b_1 = c_1 = \frac{a+b+c}{3}, \quad l_1 = m_1 = n_1 = 0 \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \frac{2a-b-c}{3} & l_2 &= l \\ b_2 &= \frac{2b-c-a}{3} & m_2 &= m \\ c_2 &= \frac{2c-a-b}{3} & n_2 &= n. \end{aligned}\right\} \tag{20a}$$

Man sieht hieraus, dafs eine solche Zerlegung stets und nur auf eine einzige Weise möglich ist. Die reine Volumveränderung ist ein so einfacher, leicht anschaulicher Vorgang, dafs weitere Auseinandersetzungen darüber unnöthig erscheinen. Dagegen ist die reine Gestaltänderung für die Anschauung noch ebenso complicirt, wie es die allgemeine Deformation war. Man könnte zu ihrer Analyse wieder auf die drei Hauptdilatationen zurückgreifen, doch würde man sie dadurch auffassen als Superpositionen dreier Vorgänge, denen das Charakteristicum der reinen Gestaltänderungen einzeln nicht zukommt, weil mit ihnen auch Volumveränderungen verbunden sind, die sich nur in summa vernichten; die Absonderung der reinen Volumveränderung würde nur als eine unnütze Weitläufigkeit erscheinen. Anders liegt die Sache, wenn es gelingt, die allgemeinste reine Gestaltänderung zusammenzusetzen aus einfacheren Elementardeformationen, welche bereits einzeln den Charakter zeigen, das Volumen unverändert zu lassen. Solche finden wir in den Schiebungen paralleler Schichten oder „Scheerungen", welche wir jetzt betrachten wollen.

Wir denken uns durch einen Massenbereich eine feste Grundebene gelegt, deren Massenpunkte unverrückt bleiben, und in dieser eine feste gerade Linie bezeichnet. Die als Scheerung zu bezeichnende Deformation besteht darin, dafs alle Massenpunkte parallel jener festen Geraden verschoben werden um Strecken, die proportional dem Abstande der Punkte von der Grundebene wachsen, nach beiden Seiten in entgegengesetzter Richtung.. Der Proportionalitätsfactor zwischen der Verrückung und dem Normalabstand von der Grundebene soll eine kleine Zahl sein, damit diese Deformation unter die Klasse der uns besonders interessirenden kleinen Deformationen gehöre. Hierdurch ist ein leicht vorstellbarer Vorgang beschrieben. Offenbar erfahren alle in derselben Parallelschicht zur Grundebene gelegenen Massenpunkte die gleiche Verrückung, die gegenseitige Lage der Punkte in der Schicht wird nicht verändert. Denken wir also den Bereich in lauter sehr dünne Schichten zerschnitten und ertheilen wir jeder Schicht dieselbe kleine Schiebung gegenüber der darunterliegenden, wie man das z. B. mit den Blättern eines Buches leicht ausführen kann, so haben wir ein anschauliches Bild einer solchen Scheerung. (Ein Unterschied liegt nur darin, dafs die getrennten Papierblätter einer Schiebung der Schichten keine inneren Kräfte entgegenstellen, während bei einem cohärenten festen Körper ein starker Widerstand zu überwinden ist.)

Zur vollständigen Beschreibung einer bestimmten Scheerung gehören drei Angaben: Erstens die Lage der Schichten. Diese wird am kürzesten durch die Richtung der Normale auf der Grundebene bezeichnet. Zweitens die Schiebungsrichtung, welche tangential zu den Schichten, also senkrecht auf der Schichtnormale liegen mufs. Drittens der kleine Zahlenfactor, welcher die Gröfse der Scheerung bestimmt. Dieser letztere tritt in die Erscheinung als der kleine Winkel, um den eine Massenlinie, welche vor der Deformation normal gegen die Schichten stand, abgelenkt worden ist. Bei gröfseren Scheerungen müfste man zwar sagen, der Tangens dieses Winkels giebt den Proportionalitätsfactor an, jedoch ist bei hinreichend kleinen Winkeln die Tangens und das Bogenmafs nicht zu unterscheiden.

Die analytische Darstellung einer Scheerung gestaltet sich natürlicherweise am einfachsten, wenn man die Coordinataxen in die ausgezeichneten Richtungen verlegen darf; dies wollen wir zunächst annehmen. Wir wählen z. B. als y-Axe eine Normale auf den Schichten, letztere liegen dann parallel der (x, z)-Ebene, diese selbst sei die feste Grundebene. Als Verschiebungsrichtung können wir dann noch entweder die x- oder z-Axe nehmen, da beide tangential zur Grundebene laufen. Wir wählen die positive z-Richtung für die Verrückungen der auf der positiven Seite der Grundebene gelegenen, also durch eine positive y-Abmessung charakterisirten Massenpunkte. In perspectivischer Zeichnung würde sich dann die Scheerung eines rechtwinkligen Parallelepipeds, welches durch die drei Coordinatebenen und drei gegenüberliegenden Ebenen im positiven Oktanten des Raumes abgegrenzt ist, ausnehmen, wie in Figur 2 angegeben. Die verkürzt gesehene x-Axe weise nach vorn gegen den Beschauer hin. Die Gestalt vor der Deformation ist $OXVZYWPU$, nach der Deformation $OXVZY'W'P'U'$. Der kleine Winkel $Y'OY$, der vier Mal in der Figur zu finden ist, giebt das Mafs der Scheerung oder den Scheerungswinkel, den wir mit ϑ bezeichnen wollen. Die drei Kanten $OX = x$, $OY = y$, $OZ = z$ sind die Coordinaten irgend eines Massenpunktes P vor der Verschiebung, die Verrückung desselben ist PP', sie bewirkt nur einen Zuwachs ζ der z-Abmessung, x und y bleiben unverändert. Aus dem rechtwinkligen Dreieck $P'VP$ liest man die Gleichung ab: $PP' = VP \cdot \operatorname{tang} P'VP$, das heisst $\zeta = \vartheta \cdot y$. Die Deformationsgleichungen dieser Scheerung lauten daher, wenn wir die Verrückungen zum Unterschiede gegen nachher vorzunehmende mit $\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1$ bezeichnen:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= 0 \\ \eta_1 &= 0 \\ \zeta_1 &= \vartheta \cdot y\,. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Wir haben hier einen besonderen Fall unserer allgemeinen Gleichungen (7) vor uns. Von den neun dort vorkommenden Coefficienten

a_1 bis c_3 sind hier acht gleich Null, nur der eine c_2 hat den Werth $+\vartheta$. Da die drei Diagonalcoefficienten a_1, b_2, c_3 fehlen, also die Summe Null geben, ist diese Deformation ohne Volumveränderung, was auch direct aus der Betrachtung von Fig. 2 (Congruenz der keilförmigen Räume $OXWYW'Y'$ und $VZPUP'U'$) folgt, wenn man bedenkt, dafs jedes beliebig gestaltete Volumen aus solchen rechtwinkligen Räumen zusammengesetzt gedacht werden kann.

Es sollen jetzt die Gleichungen (21) nach der vorher allgemein auseinandergesetzten Methode discutirt werden. Die Determinante

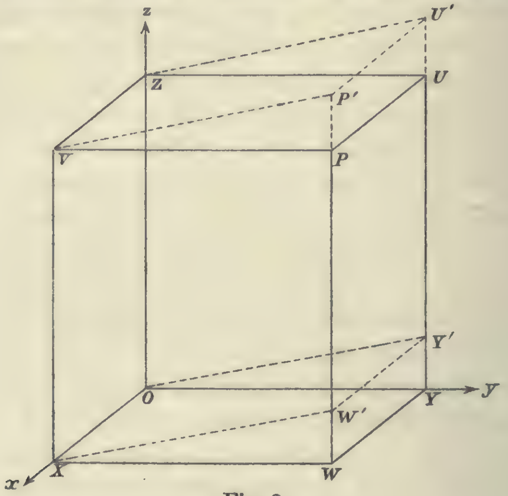

Fig. 2.

der 9 Coefficienten ist nicht symmetrisch, da dem Gliede $c_2 = \vartheta$ das Glied $b_3 = 0$ gegenübersteht; wir haben es also bei dieser einfachen Scheerung nicht mit einer reinen Deformation zu thun, sondern jedenfalls auch mit einer Drehung. Um diese abzusondern, setzen wir nach dem Muster der Gleichungen (10): $b_3 = \frac{\vartheta}{2} - \frac{\vartheta}{2}$ und $c_2 = \frac{\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{2}$ und fassen dementsprechend unsere Deformation (21) auf als Superposition folgender beider:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1' &= 0 \\ \eta_1' &= -\frac{\vartheta}{2} z \\ \zeta_1' &= +\frac{\vartheta}{2} y \end{aligned}\right\} \quad (21') \text{ und } \quad \left.\begin{aligned} \xi_1'' &= 0 \\ \eta_1'' &= +\frac{\vartheta}{2} z \\ \zeta_1'' &= +\frac{\vartheta}{2} y \end{aligned}\right\} \quad (21'')$$

Nach § 9 bezeichnen die Gleichungen (21′) eine reine Drehung, für welche nach den dort gebrauchten Bezeichnungen zu setzen ist:

$\lambda = +\vartheta/2$, $\mu = \nu = 0$. Die Drehung findet also statt um die x-Axe und zwar ist bei positivem ϑ (welches der Figur 2 zu Grunde gelegt ist) die positive x-Axe der Pfeil der Rotationsaxe, der Drehungswinkel beträgt $\vartheta/2$. In Gleichungen (21″) haben wir die gereinigte wahre Deformation, für welche nach den in § 10 gebrauchten Bezeichnungen zu setzen ist: $a = b = c = 0$, $l = \vartheta/2$, $m = n = 0$.

Die Haupt-Dilatationen σ_1, σ_2, σ_3 findet man aus der in Gleichung (13c) gegebenen cubischen Gleichung, welche in diesem Falle die einfache Gestalt besitzt:

$$\sigma^3 - \left(\frac{\vartheta}{2}\right)^2 \sigma = 0.$$

Die Wurzeln sind ohne Weiteres herauszulesen:

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -\frac{\vartheta}{2}, \quad \sigma_3 = +\frac{\vartheta}{2}.$$

Die Richtungen der Haupt-Dilatationsaxen findet man, indem man nach einander jede dieser drei Wurzeln σ einsetzt in die homogenen linearen Gleichungen (13a), welche in unserem Falle lauten,

$$\begin{aligned} -\sigma x &= 0 \\ \frac{\vartheta}{2} z - \sigma y &= 0 \\ \frac{\vartheta}{2} y - \sigma z &= 0. \end{aligned}$$

Die erste Wurzel $\sigma_1 = 0$ liefert x_1 unbestimmt, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$; damit ist die x-Axe selbst als Richtung der Haupt-Dilatation 0 bezeichnet.

Die zweite Wurzel $\sigma_2 = -\vartheta/2$ liefert $x_2 = 0$, $z_2 = -y_2$; damit ist in der (y, z)-Ebene diejenige Gerade bezeichnet, welche den zweiten und vierten Quadranten halbirt.

Die dritte Wurzel $\sigma_3 = +\vartheta/2$ liefert $x_3 = 0$, $z_3 = +y_3$; damit ist in der (y, z)-Ebene diejenige Gerade bezeichnet, welche den ersten und dritten Quadranten halbirt.

Die Discussion der durch Gleichungen (21) definirten Scheerung ist hiermit vollendet. Wir wollen ihr gegenüberstellen eine zweite Scheerung, welche sich von ihr nur dadurch unterscheidet, dafs die Rollen der y-Axe und z-Axe vertauscht sind. Jetzt soll also die z-Axe die Normale auf den Schichten angeben, die (x, y)-Ebene soll die feste Grundebene und die y-Axe die Schiebungsrichtung sein. Der Scheerungswinkel ϑ soll den gleichen Werth behalten, wie vorher. In perspectivischer Zeichnung zeigt Figur 3 diese Scheerung an demselben Parallelepiped, welches in Figur 2 benutzt wurde. Die Gestalt vor der Deformation ist $OXWYZVPU$, nachher $OXWYZ''V''P''U''$. Der Scheerungswinkel ist $Z''OZ = \vartheta$. Die

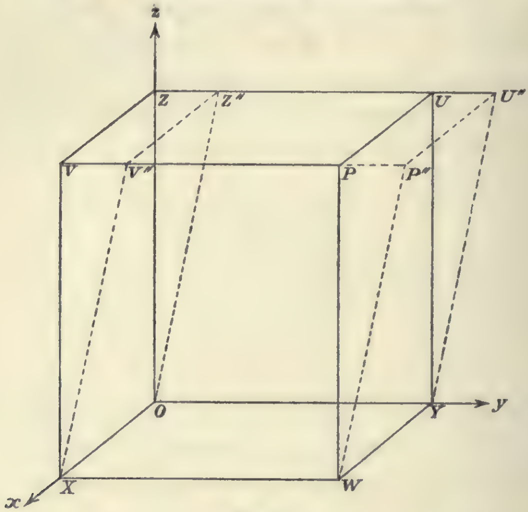

Fig. 3.

Discussion ist durchaus entsprechend der soeben durchgeführten. Die Deformationsgleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= 0 \\ \eta_2 &= \vartheta \cdot z \\ \zeta_2 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Von den 9 Coefficienten sind wieder acht gleich Null, nur $b_3 = \vartheta$. Wir spalten deshalb $b_3 = \vartheta/2 + \vartheta/2$, $c_2 = \vartheta/2 - \vartheta/2$ und zerlegen die Deformation (22) in:

$$\left.\begin{aligned} \xi_2' &= 0 \\ \eta_2' &= +\frac{\vartheta}{2} z \\ \zeta_2' &= -\frac{\vartheta}{2} y \end{aligned}\right\} (22') \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} \xi_2'' &= 0 \\ \eta_2'' &= +\frac{\vartheta}{2} z \\ \zeta_2'' &= +\frac{\vartheta}{2} y\,. \end{aligned}\right\} \quad (22'')$$

Die durch (22′) angezeigte Drehung ist entgegengesetzt gleich der durch (21′) angezeigten, die wahre Deformation (22″) aber ist identisch mit der früheren (21″), folglich finden wir für diese auch die nämlichen Haupt-Dilatationen in den gleichen Richtungen wie vorher.

Nach dem Princip der ungestörten Superposition kleiner Deformationen ist es nun leicht das Resultat anzugeben, welches die

Aufeinanderfolge oder die gleichzeitige Ausführung der beiden soeben einzeln betrachteten Scheerungen liefert. Die beiden entgegengesetzt gleichen Drehungen um die x-Axe werden einander aufheben, die beiden identischen wahren Deformationen aber werden sich zur doppelten Gröfse summiren, d. h. sie werden zusammen in der x-Richtung keine Veränderung schaffen, in der zwischen der $+y$- und $+z$-Richtung liegenden Diagonalrichtung eine Haupt-Dilatation $+\vartheta$ (Dehnung) in der zwischen der $-y$- und $+z$-Richtung liegenden Diagonalrichtung eine Haupt-Dilatation $-\vartheta$ (Zusammenziehung) erzeugen. Eine solche Superposition zweier in der angegebenen Weise sich ergänzender Scheerungen soll kurz eine Doppelscheerung genannt werden. Unter Zugrundelegung eines Coordinatensystems, dessen y- und z-Axe die beiden Schiebungsrichtungen (oder auch die beiden Schichtnormalen) anzeigen, lauten die Grundgleichungen der Doppelscheerung

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 0 \\ \eta &= \vartheta \cdot z \\ \zeta &= \vartheta \cdot y . \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Sie sind durch Superposition der Gleichungen (21) und (22) gewonnen, also $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Die Determinante der 9 Coefficienten ist hier symmetrisch, wie es der Drehungslosigkeit entspricht. Man würde (23) auch durch Superposition von (21″) und (22″), also aus $\xi = \xi_1'' + \xi_2''$ gefunden haben.

Hätten wir der zweiten Scheerung die entgegengesetzte Schiebungsrichtung (also in Fig. 3 nach links statt nach rechts) gegeben, so würden sich die Drehungen summirt haben zu einer solchen um den ganzen Winkel ϑ, die wahren Deformationen aber würden sich vernichtet haben. Eine solche Zusammenstellung von Scheerungen ist also nutzlos. Folgende Figuren 4 zeigen nochmals im kurzen Ueberblick die Wirkungen der betrachteten Scheerungen und ihrer Superposition an einem in der (y, z)-Ebene gezeichneten Quadrat. Fig. 4a veranschaulicht Gleichungen (21), Fig. 4b Gleichungen (22), Fig. 4c die Doppelscheerung Gleichungen (23). Diese letztere ist für das folgende die Wichtigste. Aus dem Quadrat mit der Diagonalen d ist ein Rhombus geworden mit den Diagonalen $d \cdot (1 + \vartheta)$ und $d \cdot (1 - \vartheta)$ und den Winkeln $\frac{\pi}{2} - 2\,\vartheta$ und $\frac{\pi}{2} + 2\,\vartheta$. Die drei unteren Figuren zeigen die Zusammensetzung zweier ihre Deformationen zerstörenden Scheerungen, Fig. 4d ist identisch mit 4a, Fig. 4e zeigt die entgegengesetzte Schiebung wie 4b, nämlich in Richtung der negativen y-Axe; in der Superposition Fig. 4f sieht man in punktirten Linien das ursprüngliche Quadrat wieder hergestellt, aber gedreht um den Winkel ϑ um eine Drehungsaxe, deren Pfeil auf den Beschauer zugekehrt ist, also nach unseren Festsetzungen mit der $+x$-Axe zusammenfällt.

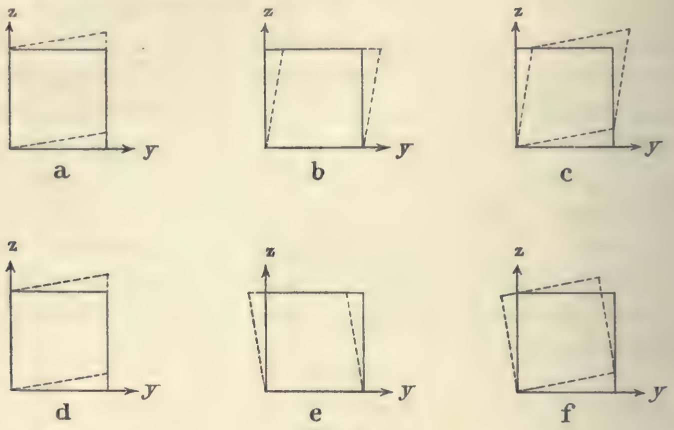

Fig. 4.

Anmerkung: Der Klarheit der Zeichnung wegen ist der Scheerungswinkel ϑ in diesen wie in den vorhergehenden Figuren (2) und (3) gröfser gewählt, als sich bei strengeren Anforderungen an Genauigkeit mit der Voraussetzung des Princips der ungestörten Superposition vertragen dürfte. Thatsächlich werden die Superpositionsfiguren (4c) und (4f) bei sorgfältiger Construction ein wenig verschieden ausfallen je nach der Reihenfolge der beiden componirenden Scheerungen, doch sind die Unterschiede der so erhaltenen Figuren nur proportional ϑ^2, also bei kleinen Winkeln unmerklich gegenüber den Verrückungen selbst, welche proportional ϑ sind.

§ 14. Synthese der allgemeinen Deformation aus Scheerungen und einer reinen Volumveränderung.

Die Gleichungen der Doppelscheerung (23) gelten, wie bemerkt, nur für eine besondere Lage des Coordinatensystems; ist dieses durch anderweitige Bestimmungen bereits festgelegt, so gelten für sie andere und im Allgemeinen verwickeltere Gleichungen, deren allgemeines Schema hier nicht aufgesucht werden soll. Nur eine Gruppe von Sonderfällen wollen wir herausgreifen: Es sollen nämlich die Coordinataxen zusammenfallen mit den Richtungen der durch Doppelscheerungen erzeugten drei Haupt-Dilatationen. Dann können wir die Deformationsgleichungen sofort fertig hinschreiben. Die Grundgleichungen lauten ja für ein solches Coordinatensystem allgemein:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a x \\ \eta &= b y \\ \zeta &= c z, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

weil (wie in Gleichungen (14)) $l = m = n = 0$ werden.

Einer der Coefficienten a, b, c mufs jetzt gleich Null, die beiden anderen entgegengesetzt gleich sein, beispielsweise setzen wir $a = 0$, $b = -\vartheta_1$, $c = +\vartheta_1$, wo ϑ_1 eine kleine Zahl bedeutet, und erhalten als Resultat einer Doppelscheerung die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= 0 \\ \eta_1 &= -\vartheta_1 y \\ \zeta_1 &= +\vartheta_1 z. \end{aligned}\right\} \tag{24_1}$$

Die Lage der beiden Schichtsysteme und Verschiebungsrichtungen fallen jetzt nicht mehr mit den Coordinatenrichtungen zusammen, man kann jene aber leicht angeben. Am anschaulichsten erreicht man dies durch ein concretes Bild: Wir denken uns die z-Axe vertical aufwärts gerichtet, also die (x, y)-Ebene horizontal; die unter einem halben Rechten geneigten Dachflächen eines Hauses, dessen First parallel der x-Axe läuft, geben uns die Lage der beiden Schichtungen an, die Verschiebung der höheren Schichten gegen die tieferen erfolgt bei positivem ϑ_1 bergauf, bei negativem ϑ_1 bergab.

Eine zweite Doppelscheerung erzeuge die Deformation

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= -\vartheta_2 x \\ \eta_2 &= 0 \\ \zeta_2 &= +\vartheta_2 z, \end{aligned}\right\} \tag{24_2}$$

wo ϑ_2 eine andere kleine Zahl bedeutet. Die Schichten und Schiebungsrichtungen lassen sich wiederum durch ein Hausdach versinnlichen, nur läuft diesmal der First des Hauses parallel der y-Axe. Offenbar spielt bei der Auswahl dieser beiden Doppelscheerungen (24_1) und (24_2) die z-Axe eine andere Rolle als die beiden gleichmäfsig verwendeten anderen Axen, erstere wird durch beide Deformationen verändert, letztere nur durch je eine Deformation.

Es soll nun nachgewiesen werden, dafs man durch zwei Doppelscheerungen der eben definirten Art und eine hinzugenommene gleichförmige Volumänderung ω, also

$$\left.\begin{aligned}\xi_0 &= \frac{\omega}{3}\,x\\ \eta_0 &= \frac{\omega}{3}\,y\\ \zeta_0 &= \frac{\omega}{3}\,z\end{aligned}\right\}\qquad (24_0)$$

jede beliebige wahre Deformation zusammensetzen kann, deren gröſste Hauptdilatation in der z-Richtung liegt, während die beiden kleineren der x- und y-Richtung folgen. (Der Begriff „gröſser" ist algebraisch aufzufassen, also z. B. $-2 > -3$.) Die herzustellenden Haupt-Dilatationen, welche vorgeschrieben worden sind, wollen wir unter Hinzufügen ihrer Axenrichtung als Index bezeichnen durch σ_x, σ_y, σ_z; σ_z sei die gröſste. Die Superposition von (24_1), (24_2) und (24_0), also $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_0$ etc., giebt dann die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \qquad\quad - \vartheta_2 x + \frac{\omega}{3} x = \sigma_x x\\ \eta &= -\vartheta_1 y \qquad\quad + \frac{\omega}{3} y = \sigma_y y\\ \zeta &= +\vartheta_1 z + \vartheta_2 z + \frac{\omega}{3} z = \sigma_z z.\end{aligned}\right\}\qquad (25)$$

Daraus folgen für die Unbekannten ϑ_1, ϑ_2, ω folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}-\vartheta_2 + \frac{\omega}{3} &= \sigma_x\\ -\vartheta_1 + \frac{\omega}{3} &= \sigma_y\\ +\vartheta_1 + \vartheta_2 + \frac{\omega}{3} &= \sigma_z,\end{aligned}\right\}\qquad (25\text{a})$$

deren eindeutige Lösungen sind

$$\omega = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$\vartheta_1 = \frac{\sigma_x - 2\,\sigma_y + \sigma_z}{3}$$

$$\vartheta_2 = \frac{-2\,\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}. \qquad (25\text{b})$$

Aus den beiden letzten ergiebt sich noch:

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{-\sigma_x - \sigma_y + 2\,\sigma_z}{3}.$$

Setzen wir diese Lösungen wieder in die Gleichungen (25a) ein, aus denen sie gewonnen wurden, so erhalten wir nach einer leichten Umformung folgende Identitäten

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{3} - \frac{\sigma_z - \sigma_x}{3} \\
\sigma_y &= \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} + \frac{\sigma_y - \sigma_z}{3} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{3} \\
\sigma_z &= \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{3} - \frac{\sigma_y - \sigma_z}{3}.
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die Sonderstellung der z-Axe, welche auch in den Bestimmungsgleichungen (25a) noch deutlich zu erkennen war, ist in diesen Identitäten verschwunden, σ_z tritt hier mit σ_x und σ_y durchaus in gleicher Verwendung auf, aus einer der Identitäten ergeben sich die beiden anderen durch cyklische Vertauschung der drei σ. Auch die Auswahl der benützten Differenzen $\sigma_x - \sigma_y$, $\sigma_y - \sigma_z$, $\sigma_z - \sigma_x$ bedeutet keine verschiedenartige Betheiligung der drei σ, man könnte ebenso gut die entgegengesetzten Differenzen $\sigma_x - \sigma_z$, $\sigma_z - \sigma_y$, $\sigma_y - \sigma_x$ benützen und würde dann statt der vorstehenden Identitäten die folgenden erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{3} - \frac{\sigma_y - \sigma_x}{3} \\
\sigma_y &= \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{3} - \frac{\sigma_z - \sigma_y}{3} \\
\sigma_3 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{3} - \frac{\sigma_x - \sigma_z}{3}.
\end{aligned}\right\} \tag{26a}$$

Die Identitäten (26) oder (26a) gelten nun ganz allgemein, welches auch die Zahlenwerthe der drei σ sein mögen, es ist nicht nöthig, dafs σ_z die gröfste Zahl sei. Eine nothwendige Gesetzmäfsigkeit der drei zusammengehörigen Differenzen, nehme man nun die in (26) oder die in (26a), besteht darin, dafs sie niemals gleichstimmig sein können, welches auch die Gröfsenfolge der drei σ sei. Entweder hat man zwei positive und eine negative, oder eine positive und zwei negative. In den besonderen Fällen, wo zwei Haupt-Dilatationen σ denselben Werth besitzen, wird eine Differenz Null, die beiden anderen entgegengesetzt gleich, bei drei gleich grofsen σ fallen natürlich die Differenzen überhaupt fort.

Man kann nun ohne Rücksicht auf das Vorausgegangene die in den Identitäten (26) (die nur in der äufseren Form davon verschiedenen Gleichungen (26a) lassen wir nun wieder fallen) ausgedrückten Spaltungen der Coefficienten σ_x σ_y σ_z in je drei rechts stehende Summanden als eine Vorschrift ansehen, nach welcher die totale Deformation

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \sigma_x \cdot x \\ \eta &= \sigma_y \cdot y \\ \zeta &= \sigma_z \cdot z \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

zerlegt werden soll in eine Reihe von Partialdeformationen die den einzelnen Gliedern der rechten Seiten von (26) entsprechen. Zunächst kann man wieder absondern als reine Volumveränderung:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} x \\ \eta_0 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} y \\ \zeta_0 &= \frac{\sigma_x + \sigma \ + \sigma_z}{3} z\,. \end{aligned}\right\} \qquad (27_0)$$

Was sonst noch übrig ist, hängt nur von den Differenzen zwischen den Hauptdilatationen ab, und läſst sich zerlegen in drei Doppelscheerungen:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= 0 \\ \eta_1 &= +\frac{\sigma_y - \sigma_z}{3} y \\ \zeta_1 &= -\frac{\sigma_y - \sigma_z}{3} z, \end{aligned}\right\} (27_1) \quad \left.\begin{aligned} \xi_2 &= -\frac{\sigma_z - \sigma_x}{3} x \\ \eta_2 &= 0 \\ \zeta_2 &= +\frac{\sigma_z - \sigma_x}{3} z, \end{aligned}\right\} (27_2) \quad \left.\begin{aligned} \xi_3 &= +\frac{\sigma_x - \sigma_y}{3} x \\ \eta_3 &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{3} y \\ \zeta_3 &= 0\,. \end{aligned}\right\} (27_3)$$

Bei der ersten und zweiten Doppelscheerung können wir die Schiebungsebenen wie früher veranschaulichen durch die Dachflächen zweier parallel der x- und y-Axe gestreckter Häuser, doch stimmen die Scheerungswinkel nicht mehr überein mit den früher in (25b) gefunden ϑ_1, ϑ_2, welche für sich allein die totale Deformation hervorbrachten. Hier haben wir noch eine dritte Doppelscheerung hinzuzufügen, deren Winkel in gesetzmäſsiger Weise aus den beiden anderen abgeleitet werden kann, denn es ist:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{3} + \frac{\sigma_y - \sigma_z}{3} + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{3} = 0\,.$$

Die Schiebungsschichten dieser dritten Doppelscheerung lassen sich in Verfolgung des früheren Bildes veranschaulichen als Parallelen zu den verticalen Mauern eines Hauses, dessen Front von der der beiden anderen Häuser im Grundriſs um einen halben Rechten abweicht. Die Gesammtheit der sechs Lagen von Schichten, welche durch diese drei Doppelscheerungen in der Substanz verschoben werden und die Richtung der Schiebungen kann man sich vergegenwärtigen in den Begrenzungsflächen eines regulären Rhomben-Dodekaeders (Fig. 5), dessen Hauptaxen in der x-, y-, z-Richtung liegen. Von den zwölf Begrenzungsflächen liegen je zwei entgegengesetzte parallel, bezeichnen also dieselbe Schichtung. Man braucht deshalb nur die halbe Oberfläche des Polyeders z. B. die in der perspectiven Darstellung dem Beschauer zugewandten sechs Rhombenflächen. Zur Scheerung (27_1) welche die x-Axe ungeschoren läfst, gehören Schichten parallel den beiden mit 1 bezeichneten Ebenen, für (27_2) liegen die Schichten parallel den beiden mit 2, für (27_3) endlich parallel den beiden mit 3 bezeichneten Ebenen. Die Schiebungsrichtungen sind für alle 6 Schichtungen durch die längeren Diagonalen der Rhomben angezeigt, der Richtungssinn dieser Schiebungen hängt vom Vorzeichen der Differenzen zwischen den σ ab, und ist in jedem Einzelfalle leicht anzugeben.

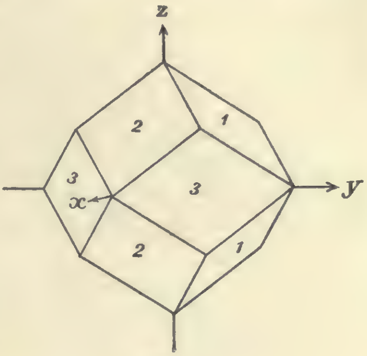

Fig. 5.

Es sei zum Schlusse dieser Betrachtungen darauf hingewiesen, dafs die Zerlegung in drei Doppelscheerungen auf unendlich viele Weise bewirkt werden kann. Mit Hülfe einer beliebig zu wählenden kleinen Zahl ε wollen wir die letzten Gleichungen folgendermafsen verändern:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1' &= 0 \\ \eta_1' &= +\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{3} + \varepsilon\right) y \\ \zeta_1' &= -\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{3} + \varepsilon\right) z, \end{aligned}\right\} (27_1') \qquad \left.\begin{aligned} \xi_2' &= -\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{3} + \varepsilon\right) x \\ \eta_2' &= \quad 0 \\ \zeta_2' &= +\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{3} + \varepsilon\right) z, \end{aligned}\right\} (27_2')$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_3' &= +\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{3} + \varepsilon\right) x \\ \eta_3' &= -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{3} + \varepsilon\right) y \\ \zeta_3' &= \quad 0. \end{aligned}\right\} (27_3')$$

Diese Gleichungen bezeichnen ebenfalls drei Doppelscheerungen, deren Gröſsen aber je nach der Wahl von ε unendlich mannigfaltig sein können, während in der Superperition $\xi_1' + \xi_2' + \xi_3'$ etc., sich das ε überall weghebt, also stets derselbe totale Deformationszustand erreicht wird. Durch Hinzufügung dieses beliebigen Gliedes ε kann man es offenbar erreichen, daſs eine der drei Doppelscheerungen einen gewünschten Betrag erhält, z. B. Null.

Würden wir z. B. ε so wählen, daſs $\xi_3' = \eta_3' = 0$ wird, so würden wir auf die ursprünglichen beiden eindeutigen Doppelscheerungen (24_1) (24_2) mit den Scheerungswinkeln (25b) zurückkommen. Also zwei Doppelscheerungen genügen auf jeden Fall zur Composition, die Zerlegung in drei solche aber ist symmetrisch und unbestimmt.

Zweiter Theil.

Dynamik continuirlich verbreiteter Massen.

§ 15. Einleitung. Strain und Stress.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der Kräfte, welche beim Zustandekommen solcher Verrückungen, wie wir sie im vorstehenden Theile behandelten, in den verschiedenen Arten von Naturkörpern erweckt werden. Der Kraftbegriff war von uns entwickelt worden an der Vorstellung discreter Massenpunkte; wir werden sehen, dafs wir ihn entsprechend unserer jetzt zu Grunde liegenden Vorstellung continuirlicher Massen erweitern müssen. Zunächst sieht man ganz allgemein, dafs der Zustand von Spannung, welcher gewisse Körper durchzieht, sobald man ihre natürliche Gestalt irgendwie verändert, ein Streben ist, wieder in die frühere Gestalt zurückzukehren, und dafs dieses Zurückgehen auch sofort unter Beschleunigung der trägen Masse vor sich geht, wenn man den äufseren Zwang aufhebt. Mithin geht bei Körpern dieser Art, welche man elastische Körper nennt, mit der geordneten Verrückung der Theilchen untrennbar Hand in Hand ein dynamischer Zustand, den wir jetzt untersuchen müssen.

In der Natur ist beides überhaupt nicht von einander getrennt, weil stets zu gleicher Zeit und am selben Orte vorhanden. Es ist nur eine zweckmäfsige Form unserer Betrachtung, dafs wir erst die Natur der Verrückung geometrisch untersuchten und dann hinterher als eine Folge desselben auf die Kräfte achten, die dadurch erweckt werden. Für die begriffliche Trennung dieser zwei Seiten derselben Naturerscheinung haben die englischen Physiker in ihrer Sprache zwei ebenso kurze wie treffende Bezeichnungen. Das, was wir im vorigen Theile als wahre Deformation bezeichneten, heifst bei ihnen „strain“, während der damit verbundene dynamische Zustand, der im Innern der deformirten Massen herrscht und aus dessen Kenntniss man die Kräfte herleiten kann, welche der Deformation widerstreben, und welchen die anzustrengenden äufseren Kräfte das Gleichgewicht halten müssen, während dieser bei ihnen als „stress" bezeichnet wird. Deutsche Bezeichnungen, welche in gleicher Allgemeingültigkeit und Kürze diese beiden Begriffe ausdrücken, scheinen nicht zu existiren, das romanische Fremdwort Deformation deckt sich wohl vollkommen mit strain, dagegen sind alle kurzen Ersatzworte für stress von zu enger Bedeutung: Druck, Zug, Schub können immer nur besondere Formen dieses Dinges ausdrücken, Spannung läfst sich noch am ehesten verallgemeinern, auch das Wort Zwang ist vorgeschlagen worden, doch versteht man darunter wohl sinngemäfser die äufseren Einflüsse, welche den ganzen veränderten Zustand der elastischen Körper erzeugen und aufrecht erhalten. Zwangszustand, elastische Reaction gegen äufseren Zwang oder gegen deformirende Kräfte — das sind Bezeichnungen, welche den Sinn der Sache richtig treffen. Wir werden uns im Folgenden mitunter erlauben im Interesse der Kürze und Prägnanz die Hauptwörter Strain und Stress wie deutsche Wörter zu benützen und dem entsprechend auch grofs zu schreiben. Wer darin eine Vergewaltigung von Sprache und Schrift erblickt, mag die angeführten Ersatzwörter dafür substituiren.

§ 16. Structur.

Um die jetzt zu bildenden neuen Begriffe, welche uns das Verhalten der elastischen Körper darzustellen helfen sollen, möglichst einfach zu erfassen, stellen wir uns das Innere eines Körpers vor, dessen continuirliche Masse überall gleiche Structur besitzt. Vom Standpunkt der Molekulartheorie ist sofort deutlich, was damit gemeint ist: Der Aufbau der ganzen Masse aus ihren kleinsten discreten Theilchen soll an allen betrachteten Stellen nach derselben Anordnung erfolgt sein. Die Molekeln eines chemisch definirten Stoffes mufs man sich ja als einzelne, wenn auch mitunter recht complicirte, so doch durchweg nach demselben Plan aus Atomen zusammengesetzte, also congruente Gebilde vorstellen. Diese müssen bei gleichartiger Structur überall nicht nur in gleicher Dichtigkeit, sondern auch in gleicher Richtung gelagert sein, wenigstens mufs in allen Räumen, welche eine mäfsig grofse Molekelanzahl umschliefsen, der Durchschnitt der Dichtigkeit und der Orientirung der gleiche sein. Diese Auffassung der gleichartigen Structur läfst sich auch noch auf Körper übertragen, die als Mischungen heterogener chemischer Stoffe erkannt sind. In solchen hat man zwar verschiedenartige Molekeln nebeneinandergemengt zu denken, wenn aber nur in hinreichend kleinen Volumelementen an verschiedenen Stellen die gleichen Dichtigkeiten der einzelnen Componenten und deren Orientirungen anzunehmen ist, so werden auch im Durchschnitt an allen Stellen dieselben Molekularkräfte bei der Verzerrung auftreten. Auf das unregelmäfsige Durcheinander der Wechselwirkungen verschiedener verschobener Molekeln in allerkleinsten Räumen, welche deren nur wenige enthalten, hat man dann nicht mehr zu achten.

Da wir nun die Vorstellung continuirlich verbreiteter Massen zu Grunde legen, so werden wir nicht auf die Betrachtung der molekularen Anordnung den Begriff der Structur aufbauen können, wir werden aber sicher denselben Begriff erhalten, wenn wir das, was in der Molekulartheorie eine Folgerung aus einer Hypothese ist, hier direct als eine Definition einführen; nämlich die Molekulartheorie folgert: Wenn zwei Gebiete, die man sich in congruenter Form und Orientirung aus dem Innern eines Körpers von gleichartiger Structur abgegrenzt denkt, denselben äusseren Einflüssen unterworfen sind, so werden sie dabei auch gleiche Deformationen erleiden und gleiche Widerstände entgegenstellen. Unsere Definition lautet nun: Eine continuirliche Masse besitzt gleichartige Structur, wenn an allen Stellen congruente und gleichliegende Gebiete unter der Wirkung derselben äufseren Einflüsse auch die gleichen Deformationen und die gleichen Widerstände zeigen. Man könnte auch noch kürzer folgendermafsen definiren: Eine Masse besitzt gleichförmige Structur, wenn an allen Stellen der Zusammenhang zwischen Strain und Stress durch das gleiche (wenn auch noch unbekannte) Gesetz geregelt wird.

§ 17. Arbeit bei einer Verrückung.

Wenn ein continuirlicher Massenbereich in irgend einem Zustande in Ruhe festgehalten worden ist, und wir wollen nun diesen Anfangszustand durch langsame Ausführung geordneter Verrückungen seiner Theilchen in einen anderen, zunächst wenig davon verschiedenen, Endzustand überführen, so müssen wir erfahrungsgemäfs entweder Arbeit zu diesem Zwecke aufwenden, oder aber wir gewinnen Arbeit dabei. Nur in ganz besonderen Fällen geht die Verrückung ohne Arbeitsaustausch vor sich. Kennen wir die Angriffspunkte und die Componenten der äufseren Kräfte, welche den anfänglichen Ruhezustand ermöglichten, so ist diese Arbeit für jeden Angriffspunkt in bekannter Weise als das Product aus Kraft und Verrückung nebst dem Cosinus des Winkels zwischen beiden zu berechnen. Ist dieser Winkel spitz, hat also die Verrückung eine Componente in der Richtung der äusseren Kraft, so leistet letztere positive Arbeit an dem Massenbereich, weicht dagegen der Angriffspunkt in entgegengesetzter Richtung zurück, so dafs er dann dem Antrieb der inneren Kräfte folgt, so giebt der Bereich dadurch positive Arbeit nach aufsen ab. Diese Arbeiten hat man dann über alle Angriffspunkte algebraisch zu summiren resp. zu integriren und findet so den positiven oder negativen Gesammtwerth der bei der Verrückung an den Bereich geleisteten Arbeit. In einem Falle, der uns weiterhin vor allen anderen beschäftigen wird, ist diese Arbeit unter keinen Umständen negativ, wie man auch die Verrückungen wählen mag: Besitzt nämlich der Bereich auch ohne jede äufsere Beeinflufsung eine bestimmte natürliche Form, wie wir dies an den „festen Körpern“ wahrnehmen, und wählen wir diese natürliche Form zum Anfangszustand, so kann man durch keine Art von Verrückung seiner Theilchen gegen einander Arbeit aus ihm gewinnen, immer mufs zu solchem Zwecke Arbeit von aufsen an ihm geleistet werden.

§ 18. Die inneren Kräfte folgen dem Reactionsprincip und sollen conservativ sein.

Die Arbeitswerthe wollen wir zur Grundlage für die Betrachtung der elastischen Kräfte nehmen. Wir begeben uns damit jedenfalls nicht auf hypothetisches Gebiet. Da man alle Verrückungen beliebig langsam ausgeführt denken kann, wird man stets unendlich nahe an Gleichgewichtszuständen bleiben können. Auch für jedes abgegrenzt gedachte Gebiet, sei es endlich oder sei es ein Volumelement, müssen dann die äufseren Kräfte sowohl in ihrer Resultante wie in einem etwa angreifenden Kräftepaar aufgehoben werden durch eine entgegengesetzt gleiche Resultante und ein entgegengesetzt drehendes Kräftepaar von innen her. Für solche Gebiete im Innern, welche nicht direct von aufsen angegriffen sind, sondern nur durch den continuirlichen Zusammenhang der Masse Verrückungen mit erleiden, müssen die inneren Kräfte allein sich das Gleichgewicht halten, d. h. sie dürfen keine Resultante geben, die den Schwerpunkt des Gebietes beschleunigt, und kein Kräftepaar, welches das Gebiet um irgend eine Axe dreht. Wir erkennen daraus sofort, dafs die inneren Kräfte dem Reactionsprincip unterworfen sind. (In der Molekulartheorie wird diese Eigenschaft von vornherein durch die Annahme von Centralkräften zwischen je zwei Molekeln eingeführt.)

Nun fügen wir eine wichtige Annahme hinzu, durch welche der

Umfang unserer Theorie in mancher Hinsicht beschränkt wird, aber dafür die Betrachtung in den zulässigen Fällen sogleich wesentlich gefördert wird; wir wollen nämlich annehmen, dafs die inneren Kräfte continuirlicher Massen conservativ sind. Auch diese Annahme ist in der Molekulartheorie selbstverständlich, denn Centralkräfte, welche nur vom Abstand abhängen, sind immer conservativ, wie in Band I, § 49 bewiesen wurde.

§ 19. Die potentielle Energie der inneren Kräfte in einem System discreter Massenpunkte.

Im ersten Bande ist nachgewiesen worden, dafs die inneren reinen Bewegungskräfte, welche die discreten Massenpunkte eines freien Massensystems angreifen, gefunden werden als die negativen Differentialquotienten einer und derselben Function aller Coordinaten, welche man als die potentielle Energie des Massensystems bezeichnet. In Formel lautet dieses Gesetz:

$$X_\mathfrak{a} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_\mathfrak{a}}, \quad Y_\mathfrak{a} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y_\mathfrak{a}}, \quad Z_\mathfrak{a} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z_\mathfrak{a}}.$$

$X_\mathfrak{a}$, $Y_\mathfrak{a}$, $Z_\mathfrak{a}$ sind die Componenten der inneren Kraft, welche den Massenpunkt $m_\mathfrak{a}$ beschleunigt; $x_\mathfrak{a}\, y_\mathfrak{a}\, z_\mathfrak{a}$ sind die variablen Coordinaten des Ortes, an dem $m_\mathfrak{a}$ liegt, und Φ ist die genannte Function, in welcher im Allgemeinen sämmtliche Coordinaten aller Massenpunkte als Variabele stecken. Man kann nun irgend eine wohl definirte Lage des Systems, in welchem sämmtliche Coordinaten feste Werthe $x_\mathfrak{a}^{(0)}\, y_\mathfrak{a}^{(0)}\, z_\mathfrak{a}^{(0)}$ haben, als Ausgangszustand vorschreiben, und aus diesem jeden anderen Zustand durch Verrückungen der Massenpunkte zu Stande bringen. Diese Verrückungen mögen durch die Componenten $\xi_\mathfrak{a}\, \eta_\mathfrak{a}\, \zeta_\mathfrak{a}$ angegeben werden. Es ist also $x_\mathfrak{a} = x_\mathfrak{a}^{(0)} + \xi_\mathfrak{a}$, etc. und man kann nun auch sagen, dass Φ eine Function der sämmtlichen Verrückungscomponenten $\xi_\mathfrak{a}\, \eta_\mathfrak{a}\, \zeta_\mathfrak{a}$ ist, während die Coordinaten $x_\mathfrak{a}^{(0)}$ etc. der gewählten Anfangslage als Constanten in dieser Function stecken. Selbstverständlich ist $\partial \Phi / \partial x_\mathfrak{a} = \partial \Phi / \partial \xi_\mathfrak{a}$, also die Kraftcomponenten auch:

$$X_\mathfrak{a} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mathfrak{a}}, \quad Y_\mathfrak{a} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_\mathfrak{a}}, \quad Z_\mathfrak{a} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_\mathfrak{a}}. \tag{28}$$

Wegen dieser inneren Kräfte bleibt nun das System, wenn es frei ist, nicht in jeder beliebigen Lage in Ruhe, man mufs vielmehr, um dies zu erreichen, an jedem Massenpunkt von aufsen eine Kraft anbringen, welche ihn festhält; deren Componenten müssen $-X_a$, $-Y_a$, $-Z_a$ sein. Existirt wirklich eine Lage, in welcher das System ohne äufsere Eingriffe in Ruhe verharren kann, so ist dies nur möglich für solche Werthe der Coordinaten, welche alle inneren Kraftcomponenten einzeln zu Null machen. Dieses Verschwinden sämmtlicher ersten Differentialquotienten von Φ ist nun die analytische Bedingung dafür, dass Φ selbst ein Grenzwerth ist; es läfst sich dann weiter zeigen, dass der Ruhezustand nur dann ein stabiles Gleichgewicht besitzt, wenn der Grenzwerth von Φ ein absolutes Minimum ist. Hat man eine solche Gruppe von Coordinaten gefunden, welche dieser Forderung genügen, so ist es meistens für die Betrachtung zweckmässig, diese als den Anfangszustand (x_a^0, y_a^0, z_a^0) zu wählen. Da ferner die Function Φ nur durch ihre Differentialquotienten bestimmt wird, so besitzt sie, wie jedes unbestimmte Integral, eine willkürliche additive Constante; diese kann man zweckmässig so wählen, dass der Werth des absoluten Minimums, welcher für den Anfangszustand eintritt, gleich Null wird.

Die wichtigste Eigenschaft der potentiellen Energie besteht darin, dafs sie als Arbeitsvorrath des Systems auftritt, welcher in demselben Mafse wächst oder abnimmt, als an dem System durch äufsere Kräfte gearbeitet wird, oder aber von dem System Arbeit nach aufsen geleistet wird. Um dies einzusehen, denken wir uns das System in einer durch die Verrückungen $\xi_a \eta_a \zeta_a$ definirten Lage durch äufsere Kräfte festgehalten. Diese sind, wie schon vorher angedeutet:

$$(-X_a) = +\frac{\delta\Phi}{\delta\xi_a}, \quad (-Y_a) = +\frac{\partial\Phi}{\partial\eta_a}, \quad (-Z_a) = +\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_a}. \tag{28a}$$

Nun denken wir uns sehr langsam jede Verrückungscomponente variirt um die Strecken $\delta\xi_a$, $\delta\eta_a$, $\delta\zeta_a$, welche so unendlich klein sind, dafs die Kräfte des Systems und folglich auch die von aufsen nöthigen Gegenkräfte dabei nicht merklich sich ändern. Dann kostet offenbar im Ganzen genommen, diese Variation der Lage keine Arbeit, weil auf jeden Massenpunkt in summa von innen und aufsen her die Kraft Null wirkt, und weil wegen der Langsamkeit auch keine lebendige Kraft der Bewegung zu erzeugen ist. Trennt man aber die Betrachtung der inneren Kräfte von der der äufseren, so kann man sagen, die äufseren Kräfte leisten Arbeit, welche das System gewinnt, oder umgekehrt. Um die Umständlichkeit des gewöhnlichen Sprachgebrauches zur Unterscheidung dieser beiden nur durch das Zeichen + oder — unterschiedenen Processe zu vermeiden, wollen wir hier immer sagen, die äufseren Kräfte leisten Arbeit an dem System. Der Betrag A der Arbeit ist in allen Fällen

$$A = \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ (-X_\alpha)\,\delta\xi_\alpha + (-Y_\alpha)\,\delta\eta_\alpha + (-Z_\alpha)\,\delta\zeta_\alpha \right\}. \tag{29}$$

Sollte der Fall vorliegen, dafs das System Arbeit nach aufsen abgiebt, so wird eben A negativ.

Die Variation, welche die potentielle Energie des Systems durch die gedachten Variationen der sämmtlichen Verrückungscomponenten ξ_α, η_α, ζ_α erfährt, drückt sich ganz nach dem Vorbilde eines totalen Differentials folgendermafsen aus:

$$\delta\Phi = \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_\alpha}\,\delta\xi_\alpha + \frac{\partial\Phi}{\partial\eta_\alpha}\,\delta\eta_\alpha + \frac{\delta\Phi}{\delta\zeta_\alpha}\,\delta\zeta_\alpha \right\}. \tag{29a}$$

Man sieht, dafs dieser Ausdruck gleich dem darüber stehenden Ausdruck für die virtuelle Arbeit A ist, denn man braucht in jenem nur die in Gleichung (28a) gegebenen Werthe der äufseren Kräfte einzusetzen, um beide rechte Seiten identisch zu machen. Wir haben also das Resultat:

$$A = \delta\Phi \quad \text{oder} \quad A - \delta\Phi = 0. \tag{29b}$$

Für unsere gegenwärtigen Betrachtungen genügt es, die vorstehende Ueberlegung für eine unendlich kleine Veränderung der Configuration durchzuführen. Es liefse sich auch zeigen, dafs bei Veränderungen von endlicher Gröfse die Arbeit der äufseren Kräfte gleich ist dem Zuwachs der potentiellen Energie des Systems (mithin nur abhängig von der Anfangs- und der Schlufsconfiguration, nicht aber von den Zwischenstufen). Dies ist im Wesentlichen der Inhalt des Energieprincips für Systeme ohne lebendige Kraft, in welchen nur conservative innere Kräfte mitspielen, in denen also keine Verwandlungen in aufsermechanische Energieformen, namentlich in Wärme, oder umgekehrt zu beachten sind. Die äufseren Kräfte, welche den inneren das Gleichgewicht halten, brauchen nicht conservativ zu sein.

Man kann die soeben durchgeführte Betrachtung rein logisch umkehren, indem man voraussetzt, dafs die an dem System geleistete Arbeit sich wiederfindet als Vermehrung der potentiellen Energie, und nun die Folgerung zieht, welche Natur die inneren Kräfte des Systems alsdann haben müssen. Für Systeme discreter Massenpunkte bereichert dieser umgekehrte Gedankengang unsere Kenntnisse nicht weiter, wir finden als Schlufsresultat dabei dieselben Ausdrücke für die Kräfte (Gleichungen 28), welche bei der vorhergehenden Betrachtung als Voraussetzung gedient hatten. Aber dieser Weg der Betrachtung kann fruchtbar werden in den Fällen, wo man die Natur der inneren Kräfte noch nicht kennt, sondern nur zu der Annahme berechtigt ist, dafs diese conservativ sind. In solcher Lage befinden wir uns an dieser Stelle den elastischen Kräften gegenüber. Es dürfte daher nicht unnütz sein, diesen Gedankengang, der übrigens in manchen verschiedenen Capiteln der Physik typisch wiederkehrt, zum bequemen Vergleich mit dem folgenden und als Vorbereitung hier an dem Schema der Punktsysteme durchzumachen. Der Vorgang, den wir betrachten, ist der gleiche wie vorher: eine kleine Variation der Coordinaten eines durch äufseren Zwang in verzerrtem Zustand festgehaltenen Systems. Die dabei von aufsen geleistete Arbeit ist der Ausdruck A in Gleichung (29). Die Zunahme der potentiellen Energie ist $\delta\,\Phi$ in Gleichung (29a). Diese beiden Ausdrücke müssen jetzt nach Voraussetzung einander gleich sein, ihre Differenz $(A - \delta\,\Phi)$ also gleich Null. Beide Werthe sind Summen über die Ordnungszahlen der Massenpunkte und enthalten in ihren Gliedern dieselben Factoren $\delta\,\xi_a$, $\delta\,\eta_a$, $\delta\,\zeta_a$. Man kann sie deshalb zu einer einzigen Summe vereinigen und findet so folgende Forderung:

$$\left.\begin{aligned}\sum_a \Big\{\Big[(-X_a) - \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\xi_a}\Big]\delta\,\xi_a + \Big[(-Y_a) - \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\eta_a}\Big]\delta\,\eta_a \\ + \Big[(-Z_a) - \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,\zeta_a}\Big]\delta\,\zeta_a\Big\} = 0\,.\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Man kann dieser Gleichung nebenbei noch eine andere Form geben. Zunächst kann man wegen der Null rechts alle Minuszeichen in Plus verwandeln. Ferner ist es möglich, sie darzustellen als Variation einer zusammengesetzten Function

$$\delta\left\{\Phi + \sum_a (X_a\,\xi_a + Y_a\,\eta_a + Z_a\,\zeta_a)\right\} = 0\,. \quad (30\text{a})$$

In dieser Form geschrieben bedeutet die Gleichung, dafs der Ausdruck in der geschweiften Klammer ein Minimum sein soll; dies ist die allgemeine Gleichgewichtsbedingung, man mufs dabei beachten, dafs man zur potentiellen Energie der inneren Kräfte hinzufügen mufs Glieder, welche die Reactionen X_a gegen die äufseren Kräfte $(-X_a)$, jede multiplicirt mit der entsprechenden ganzen Verrückung ξ_a, enthalten. Wir wollen hier indessen bei der ersteren Form (30) bleiben.

Diese Summe kann nicht dadurch verschwinden, dafs einige Glieder positiv, andere negativ ausfallen, sondern nur dadurch, dafs jede einzelne der eckigen Klammern gleich Null ist. Wäre dies nämlich nicht erfüllt, so könnte man jeder Varation $\delta \xi_a$ etc., das gleiche Vorzeichen geben, welches die damit verbundene eckige Klammer besitzt, dadurch würde man jedes einzelne Glied wesentlich positiv machen können, das Verschwinden der ganzen Summe also vereiteln können. Da aber für die Wahl der Variationen gar keine Vorschrift besteht, aufser dafs sie hinreichend klein bleiben, so ist die Bedingung Gleichung (30) identisch mit den $3n$ Einzelbedingungen, dafs jede eckige Klammer einzeln gleich Null ist, dafs also $(-X_a) = +\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_a}$ sein mufs. Da nun die äufseren Kräfte zur Erhaltung der Ruhe entgegengesetzt gleich den inneren sein müssen, so folgt für letztere $+X_a = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_a}$.

§ 20. Die potentielle Energie deformirter elastischer Körper.

Wollten wir nun zu continuirlichen Massen dadurch übergehen, dafs wir die Massenpunkte dicht gedrängt annehmen, und in jedem selbst kleinen Volumelement noch von unendlich grofser Anzahl, so würde die Schwierigkeit entstehen, dafs Φ eine Function von unendlich vielen Variabelen wird, auch würde dieser Weg unserer zu Grunde gelegten Annahme von continuirlich verbreiteten Massen zuwider sein. In der kinematischen Einleitung haben wir ferner gesehen, dafs wir uns auf geordnete Verrückungen beschränken müssen, als deren charakteristische Eigenschaft gefunden wurde, dafs $\xi\, \eta\, \zeta$ differenzirbare Functionen der Ortscoordinaten $x\, y\, z$ sein müssen. Es treten also an die Stelle unendlich vieler Variabelen drei Functionen der Raumcoordinaten. Von diesen mufs Φ nun abhängen. Die Art dieser Abhängigkeit haben wir zunächst aufzusuchen.

Ist ein Bereich durch äufsere Arbeitsleistung in eine verzerrte Lage gebracht worden, so enthält er nun die potentielle Energie, welche jener Arbeitsleistung gleich ist; jedes Stück enthält seinen Antheil in sich. Gegen eine gemeinsame Parallelverschiebung äufsert der Körper keinen Widerstand, solche kostet keine Arbeit, verändert mithin auch den Inhalt an potentieller Energie nicht. Daraus sieht man sogleich, dafs die $\xi\ \eta\ \zeta$ selbst nicht die Function Φ bestimmen werden. Ebenso ist es mit einer gemeinsamen Drehung des Körpers. Deshalb werden auch die in § 9 betrachteten λ, μ, ν

keinen Einfluſs auf Φ haben; es bleiben mithin als bestimmende Elemente nur die 6 Maſse der wahren Deformation $a\ b\ c\ l\ m\ n$ übrig.

So weit die Deformation gleichförmig ist, also $a\ b\ c\ l\ m\ n$ räumlich constant sind, enthalten gleichgroſse Ausschnitte gleiche Quanta dieser potentiellen Energie, d. h. letztere ist proportional dem herausgegriffenen Volumen. Da nun jede Deformation in hinreichend kleinem Bereich als gleichförmig anzusehen ist, ist der Energieinhalt im Volumelement $d\tau$ zu setzen gleich $\varphi \cdot d\tau$. Die Gröſse φ kann man die räumliche Dichtigkeit der elastischen Energie nennen; ihr Betrag wird bedingt durch die Deformation, und wenn es gelingen soll, sie als explicite Function der 6 Variabelen a bis n hinzustellen, wird man dazu noch gewisse für die Natur des deformirten Materials charakteristische Coefficienten nöthig haben, welche so weit constant sind, als der Körper gleichmäſsig structurirt ist. Der Gesammtinhalt an elastischer Energie in einem ausgedehnten Bereich ist dann das Raumintegral der Function φ, und soll bezeichnet werden durch:

$$\Phi = \iiint \varphi \cdot d\tau. \tag{31}$$

Durch diesen Ansatz ist die Klasse der hier gesuchten elastischen Kräfte bereits im Keime charakterisirt: Diese Darstellung der potentiellen Energie in einem Massenbereich unterscheidet sich wesentlich von jener für ein System discreter Massenpunkte, wo wir zwischen jedem möglichen Paare von Massenpunkten eine Centralkraft annahmen. Eine Zertheilung des Gesammtbetrages nach räumlichen Bezirken des Systems hätte dort keinen Sinn, man kann nicht die einzelnen Volumelemente als den Sitz von ihnen proportionalen Mengen der potentiellen Energie ansehen, wie es hier durch den Begriff der Function φ geschieht. Die Molekulartheorie, welche mit den Begriffen der Punktsysteme arbeitet, gewinnt diesen Umschwung der Auffassung dadurch, daſs sie den Centralkräften zwischen je zwei Molekeln einen so engen Wirkungskreis zuschreibt, daſs selbst bei sehr kleinen Volumelementen die Beiträge zur potentiellen Energie von auſsen her (d. h. eine Molekel innen, die andere auſserhalb) verschwinden gegen die Summe der inneren Beiträge (d. h. wo beide Molekeln im Raumelement selbst liegen.) Der Ansatz (31) soll übrigens nicht der Forderung genügen, den vollen Inhalt an potentieller Energie zu erschöpfen; die additive Constante, welche man sich immer hinzudenken muſs, vermag allerlei in sich aufzunehmen. Nur erleiden die folgenden Untersuchungen die Beschränkung, daſs diese vernachlässigten Bestandtheile bei der im

Folgenden vorzunehmenden virtuellen Verrückung des Systems sich nicht durch bemerkbare Veränderung störend geltend machen dürfen, andernfalls wäre die Anwendung des Energieprincips unvollständig. Unter den hier vernachlässigten Antheilen ist namentlich in gewissen Fällen die potentielle Energie der ebenfalls conservativen Capillarkräfte wichtig. Dieser trägt man Rechnung, wenn man nicht nur jedes Volumelement als Sitz von Energie ansieht, sondern auch jedes freie Oberflächenelement, mit dem der Körper an heterogene Media oder an leeren Raum angrenzt, wenn man also zu Φ noch hinzufügt ein Glied

$$+\iint \psi \cdot d\,s, \tag{31 a}$$

welches über sämmtliche eben bezeichnete Flächen zu erstrecken ist. Der Proportionalitätsfactor ψ, die Flächendichtigkeit der capillaren Energie, hängt nur ab von der Natur der sich berührenden Stoffe und ist für jedes Paar von Stoffen eine feste Gröfse, so dafs für solche die capillare Energie direct proportional der Berührungsfläche ist. Der Sinn dieses neuen Ansatzes ist für positives ψ, (welches sicher zu erwarten ist, wo eine Substanz an Luft oder leeren Raum grenzt), dafs bei einer Deformation eines Körpers, welche dessen freie Oberfläche vergröfsert, eine Vermehrung der potentiellen Energie hinzukommt, also von aufsen Arbeit geleistet werden mufs gegen die sogenannten „Capillarkräfte“, deren Bestreben ist, die freie Oberfläche des Körpers so klein wie möglich zu gestalten. Wenn daher keine anderen Kräfte sich dem widersetzen, so wird der Körper zunächst ohne Volumänderung Kugelgestalt annehmen, denn die Kugel besitzt das Minimum der Oberfläche bei gegebenem Volumen. Eine noch weitergehende Verminderung der Oberfläche ist dann nur bei gleichzeitiger Volumverminderung möglich. Die erste Deformation bei constantem Volumen kann, wie wir gesehen haben, allein durch Scheerungen erzeugt werden, die zweite aber ist eine gleichmäfsige Compression. Gegen letztere äufsern alle Körper starken Widerstand, so dafs es sehr bald zu einem Gleichgewicht zwischen Capillar- und Druckkräften kommen mufs. Gegen Scheerungen aber äufsern tropfbare Flüssigkeiten keinen Widerstand, daher tritt bei diesen die Zusammenballung zur Kugel stets da ein, wo äufsere Kräfte, namentlich die Schwere, dem nicht im Wege stehen, z. B. bei frei schwebenden oder fallenden Tropfen. Auch andere Gleichgewichtsconfigurationen für die Berührungsflächen von schweren Flüssigkeiten mit anderen oder mit festen Körpern und Gasen lassen sich aus dem Minimum der Summe der potentiellen Energie der

Schwerkraft und der Capillarkräfte erklären. Die festen Körper dagegen setzen auch den Scheerungen starken Widerstand entgegen, so dafs die Capillarkräfte auch den ersten Theil der Oberflächenverminderung nicht zu Stande bringen können. Dafs sie dem Widerstande gegen Scheerung völlig machtlos gegenüber stehen, sieht man aus der Erscheinung, dafs beim Zerbrechen eines festen Körpers, also bei einer plötzlichen Vergröfserung seiner freien Oberfläche doch die Bruchstücke ihre Gestalt so treu bewahren, dafs man sie lückenlos wieder zusammenfügen kann. Hätten die Capillarkräfte einen merklichen abrundenden Einflufs, so würden die Bruchflächen sich niemals wieder zur Deckung bringen lassen, weil beide nach aufsen mehr convex geworden sein müfsten. Dies giebt uns also ein Recht, in der Dynamik fester Körper, auf deren Grundlagen es uns hier zumeist ankommt, die Capillarkräfte zu vernachlässigen, das Glied (31 a) fortzulassen und für die potentielle Energie der inneren Kräfte den Ansatz (31) zu machen. Auch ein grofser Theil der Hydrodynamik läfst sich noch ohne Berücksichtigung der Capillarkräfte entwickeln; bei den Gasen endlich fehlt erfahrungsmäfsig diese Klasse von Kräften gänzlich.

§ 21. Die Variation $\delta\,\Phi$ bei einer virtuellen Verrückung des deformirten Bereiches.

Nun denken wir, ganz wie vorher bei dem System discreter Punkte, kleine virtuelle Verrückungen in unserem Bereich ausgeführt, deren Componenten wir durch $\delta\,\xi$, $\delta\,\eta$, $\delta\,\zeta$ bezeichnen. Diese drei Zeichen bedeuten jetzt willkürliche, aber differenzirbare Functionen der Coordinaten, denn bei continuirlicher Massenverbreitung kann man sich auch eine virtuelle Verrückung nur als eine geordnete vorstellen. Da sie indessen keine wirkliche ist, und das gesuchte Gleichgewicht auch bestehen würde, wenn die Kräfte von der Configuration unabhängig wären, so sollen, wie bei allen virtuellen Verrückungen, die Werthe der Kräfte nicht variirt werden. Durch die Ausführung dieser virtuellen Verrückung erfährt das Integral eine Variation $\delta\,\Phi$. Es ist besonders darauf hinzuweisen, dafs auch die Grenzen des Raumintegrales nicht variirt werden sollen, obwohl die Grenzfläche des Körpers ebenfalls den beliebigen Verrückungen ausgesetzt ist. Die Grenzen des Integrals trennen den von uns betrachteten Bereich ab von der übrigen Körperwelt, von welcher aus nur die sogenannten äufseren Kräfte wirken. Der Bereich selbst aber soll durch die virtuellen Verrückungen in seinem Bestand an Massentheilchen nicht verändert werden. Die Variirung ist also unter dem Integralzeichen auszuführen.

$$\delta\,\Phi = \iiint \delta\,\varphi \cdot d\,\tau. \tag{32}$$

Die Variation von φ kommt nun dadurch zu Stande, dafs die $\delta\,\xi$, $\delta\,\eta$, $\delta\,\zeta$ eine virtuelle Deformation in jedem Volumelemente erzeugen, dafs also die Gröfsen $a\;b\;c\;l\;m\;n$ verändert werden um die Beträge $\delta\,a$, $\delta\,b$, $\delta\,c$, $\delta\,l$, $\delta\,m$, $\delta\,n$. Man findet also die totale Variation von φ als Function der 6 Variabelen nach der bekannten Vorschrift

$$\delta\,\varphi = \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,a}\,\delta\,a + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,b}\,\delta\,b + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,c}\,\delta\,c + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,l}\,\delta\,l + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,m}\,\delta\,m + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,n}\,\delta\,n.$$

Nun mufs man auf die Definitionen von a, b, $\ldots n$ zurückgehen. Es folgt daraus z. B.:

$$\delta\,a = \delta\,\frac{\partial\,\xi}{\partial\,x} \quad \text{und} \quad \delta\,(2\,l) = \delta\,\frac{\partial\,\zeta}{\partial\,y} + \delta\,\frac{\partial\,\eta}{\partial\,z}.$$

Da die Ortscoordinaten x, y, z ebenso wie die Integralgrenzen von der Variirung nicht betroffen werden, so ist $\delta\,\frac{\partial\,\xi}{\partial\,x} = \frac{\partial\,\delta\,\xi}{\partial\,x}$ und analog alle anderen, die Bildung der Variation und des Differentialquotienten nach einer Coordinatenrichtung an den Verrückungen ξ, η, ζ sind in diesem Falle zwei Operationen, deren Reihenfolge vertauscht werden kann. Thut man dies bei allen 6 Variationen $\delta\,a$ bis $\delta\,n$ und führt $2\,l$, $2\,m$, $2\,n$ an Stelle von l, m, n ein, so erhält man in übersichtlicher Anordnung

$$\delta\,\Phi = \iiint d\,\tau \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,a} \cdot \frac{\partial\,\delta\,\xi}{\partial\,x} + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,2\,n} \cdot \frac{\partial\,\delta\,\xi}{\partial\,y} + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,2\,m} \cdot \frac{\partial\,\delta\,\xi}{\partial\,z} \\ & + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,2\,n} \cdot \frac{\partial\,\delta\,\eta}{\partial\,x} + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,b} \cdot \frac{\partial\,\delta\,\eta}{\partial\,y} + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,2\,l} \cdot \frac{\partial\,\delta\,\eta}{\partial\,z} \\ & + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,2\,m} \cdot \frac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,x} + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,2\,l} \cdot \frac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,y} + \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,c} \cdot \frac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,z}\,. \end{aligned} \right\} \tag{32a}$$

Dies ist die Variation der potentiellen Energie des deformirten Bereiches. Vergleicht man sie mit dem entsprechenden Ausdruck für ein discretes Punktsystem (Gleichung 29a), so fallen zwei Unterschiede auf. Erstens haben wir hier statt einer Summation über sämmtliche Punkte eine Integration über den ganzen Raum des Bereiches: Eine sachgemäſse Folge unserer Annahme continuirlicher Massenverbreitung. Eingreifender ist der zweite Unterschied, daſs die Summanden des Integrandus nicht wie dort mit den Factoren $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ behaftet sind, sondern statt dessen die partiellen Differentialquotienten dieser virtuellen Verrückungen nach den Coordinatrichtungen enthalten. Wir können deshalb den auf S. 62—63 vorbildlich hingestellten Gedankengang nicht ohne Weiteres auf unseren jetzigen Fall übertragen, denn es war dabei wesentlich, daſs das $\delta\Phi$ die Factoren $\delta\xi$, etc. in jedem Glied enthielt. Nur so konnte es gelingen, in $A - \delta\Phi$ die Glieder paarweise zusammen zu fassen und die Gleichung (30) zu bilden, aus welcher dann die Werthe der Kräfte direct herauszulesen waren. Man hat indessen ein mathematisches Hülfsmittel, durch welches man auch hier den Ausdruck $\delta\Phi$ in die gewünschte Form bringen kann: die partielle Integration. Diese Operation muſs an jedem der 9 Summanden des Integrandus einzeln ausgeführt werden, doch wird es genügen, hier an einem einzigen Gliede zu zeigen, wie dies geschieht. Alle anderen lassen sich dann nach demselben Schema behandeln.

Nach den Regeln der Differentialrechnung ist:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}\cdot\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\cdot\delta\xi\right) - \frac{\partial\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}}{\partial x}\,\delta\xi\,. \tag{33}$$

Dies hat man mit $d\tau = dx\cdot dy\cdot dz$ zu multipliciren und über den Bereich zu integriren. Dann kann man im ersten Gliede rechts die Integration nach x ausführen. Wir wollen dabei zunächst voraussetzen, daſs $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ im ganzen Bereiche stetig bleibt. Dies trifft sicher zu, wenn der Bereich überall von gleicher Structur ist, auch eine allmähliche Aenderung der Structur von Ort zu Ort kann zugelassen werden, dann sind die in φ steckenden Elasticitätscoefficienten zwar nicht constant, aber doch stetige Functionen der Raumcoordinaten. In diesen Fällen wird auch der Strain, d. h. die Variabelen $a\,b\,c\,l\,m\,n$ überall stetig sein, die virtuellen Verrückungen $\delta\xi$ endlich müssen nach unseren Festsetzungen immer stetig angenommen werden. Grenzen dagegen im inneren des Bereiches zwei heterogene Media längs einer Fläche an einander, so werden dort φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ etc. unstetig. Dieser Umstand fordert eine besondere Betrachtung, die wir später (§ 26) vornehmen werden. Also für stetige Bereiche erhält man:

$$\iiint d\tau \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} \cdot \frac{\partial\,\delta\,\xi}{\partial x} = \iint dy \cdot dz \cdot \overline{\underline{\frac{\partial \varphi}{\partial a}\,\delta\,\xi}}_{x_0}^{x_1} - \iiint d\tau \frac{\partial \dfrac{\partial \varphi}{\partial a}}{\partial x}\,\delta\,\xi. \tag{33a}$$

Das Doppelintegral rechts läfst sich verwandeln in ein Oberflächenintegral des Bereiches. Die Normale auf einem Elementar-Rechteck $dy \cdot dz$, in Richtung der positiven x-Axe geführt, tritt in den Bereich ein an der Stelle x_0. Die innere Normale auf der Oberfläche des Bereiches bilde dort mit der x-Richtung den Winkel $(n_0\,x)$, dieser mufs spitz sein. Das dort gelegene Oberflächenelement $d\,s_0$ wählen wir so, dafs dessen Projection in der x-Richtung sich mit $dy \cdot dz$ deckt, alsdann ist $dy \cdot dz = +\,d\,s_0 \cdot \cos\,(n_0\,x)$.

Dieselbe x-Linie verläfst den Bereich bei x_1, die innere Normale der Oberfläche bildet dort mit der positiven x-Richtung den nothwendig stumpfen Winkel $(n_1\,x)$. Das Flächenelement $d\,s_1$ wählen wir wie vorher. Dann ist hier wegen des negativen Cosinus

$$dy \cdot dz = -\,ds_1\,\cos\,(n_1\,x).$$

Der Integrand endlich ist folgende Differenz

$$\overline{\underline{\frac{\partial \varphi}{\partial a}\,\delta\,\xi}}_{x_0}^{x_1} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\,\delta\,\xi\right)_1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\,\delta\,\xi\right)_0.$$

Für $dy \cdot dz$ wählen wir die Ausdrücke, welche in den Indices 1 und 0 übereinstimmen mit den beiden Theilen des Integranden. Dann sieht man, dafs äufserlich überall das Zeichen „Minus" auftritt, dafs also die Antheile der Eintrittsflächen und Austrittsflächen der positiven x-Richtung im Oberflächen-Integrale durch nichts mehr unterschieden sind, dafs man also nun die unterscheidenden Indices 0 und 1 weglassen kann. Man erhält so als Resultat der partiellen Integration des ersten Summanden von $\delta\,\Phi$:

$$\iiint d\tau \frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial\,\delta\,\xi}{\partial x} = -\iint ds \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a} \cos nx \cdot \delta\,\xi - \iiint d\tau \frac{\partial \dfrac{\partial \varphi}{\partial a}}{\partial x}\,\delta\,\xi. \tag{33b}$$

Ein anderes der neun Glieder, ebenso behandelt, würde liefern:

$$\iiint d\tau \frac{\partial \varphi}{\partial\,2\,l} \cdot \frac{\partial\,\delta\,\eta}{\partial z} = -\iint ds \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial\,2\,l} \cos nz \cdot \delta\,\eta - \iiint d\tau \frac{\partial \dfrac{\partial \varphi}{\partial\,2\,l}}{\partial z}\,\delta\,\eta. \tag{33c}$$

Ganz analog die Uebrigen. Das Resultat der ganzen Umformung, nachdem man noch alle Oberflächen- und Raum-Integrale in je eines zusammengefaſst hat und die Integranden nach den nunmehr, wie gewünscht, explicite herausgetretenen Factoren $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ ordnet, ist:

$$
\begin{aligned}
\delta\Phi = \iint ds \left\{
\begin{array}{l}
\left[-\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}\cos nx - \dfrac{\partial\varphi}{\partial 2n}\cos ny - \dfrac{\partial\varphi}{\partial 2m}\cos nz\right]\delta\xi \\
+\left[-\dfrac{\partial\varphi}{\partial 2n}\cos nx - \dfrac{\partial\varphi}{\partial b}\cos ny - \dfrac{\partial\varphi}{\partial 2l}\cos nz\right]\delta\eta \\
+\left[-\dfrac{\partial\varphi}{\partial 2m}\cos nx - \dfrac{\partial\varphi}{\partial 2l}\cos ny - \dfrac{\partial\varphi}{\partial c}\cos nz\right]\delta\zeta
\end{array}\right\} \\
+\iiint \delta\tau \left\{
\begin{array}{l}
\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial\varphi}{\partial 2n}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(-\dfrac{\partial\varphi}{\partial 2m}\right)\right]\delta\xi \\
+\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial\varphi}{\partial 2n}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial\varphi}{\partial b}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(-\dfrac{\partial\varphi}{\partial 2l}\right)\right]\delta\eta \\
+\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial\varphi}{\partial 2m}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial\varphi}{\partial 2l}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(-\dfrac{\partial\varphi}{\partial c}\right)\right]\delta\zeta
\end{array}\right\}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

§ 22. Auffindung der äuſseren Kräfte, welche den deformirten Bereich in Ruhe halten.

Der vorstehende Ausdruck $\delta\Phi$ hat jetzt die Form, in der er uns nach dem Vorbild der für Punktsysteme durchgeführten Betrachtung zur Auffindung der äuſseren Kräfte, welche den deformirten Bereich in Ruhe halten, dienen kann. Betrachten wir zuerst das Raumintegral; es ist anzusehen als Summe zahlloser kleinster Glieder, deren jedes durch seinen Factor $d\tau$ die Stelle anzeigt, deren Coordinaten als Variabele in den Integrandus einzusetzen sind. Jedes einzelne mit $\delta\xi$ behaftete Elementarglied zeigt eine x-Kraft an, welche dort angreift, wo das zugehörige $d\tau$ liegt, ebenso deuten die mit $\delta\eta$ oder $\delta\zeta$ behafteten Glieder auf angreifende y- oder z-Kräfte. Diese Kräfte sind von demselben Typus, den wir in der Dynamik discreter Massenpunkte allein kennen gelernt haben, man kann sie kurz als die träge Masse direct angreifende „Fernkräfte“ bezeichnen, ohne mit diesem Wort irgend eine Erklärung über den wahren Mechanismus ihres Zustandekommens geben zu wollen. Ihr wichtigster Repräsentant ist die Schwerkraft, überhaupt die Gravitation, welche continuirlich verbreiteter Masse in gleicher Weise eigen ist, wie discreter. Der einzig dabei zu beachtende Unterschied besteht darin, daſs an Stelle der Massenpunkte jetzt die Massenelemente treten, welche die einzelnen kleinen Räume $d\tau$ ausfüllen und deren

Gröfse mit Hülfe des Begriffes der räumlichen Dichtigkeit μ durch den Ausdruck $\mu \cdot d\tau$ bezeichnet wird. Wäre solch ein Massentheilchen herausgeschnitten aus dem festen Zusammenhang und frei beweglich im leeren Raum, so würde es der angreifenden Fernkraft folgen in beschleunigter Bewegung.

Die Componenten dieser Beschleunigung sollen hier mit X, Y, Z[1] bezeichnet werden, so dafs als mechanisches Mafs für die Intensität und Richtung der Fernkraft auf das Massenelement $\mu\, d\tau$ folgende Ausdrücke auftreten: $X \cdot \mu\, d\tau$, $Y \cdot \mu\, d\tau$, $Z \cdot \mu\, d\tau$. Die Arbeit bei der virtuellen Verrückung dieses Theilchens ist als (inneres) Product aus Kraft und Weg gleich $X\mu\, d\tau \cdot \delta\xi + Y\mu\, d\tau \cdot \delta\eta + Z\mu\, d\tau \cdot \delta\zeta$, und dieser Ausdruck summirt (integrirt) über den ganzen Bereich giebt die gesammte virtuelle Arbeit A_1 der äufseren Fernkräfte:

$$A_1 = \iiint d\tau \cdot \{[\mu X]\,\delta\xi + [\mu Y]\,\delta\eta + [\mu Z]\,\delta\zeta\}. \tag{35}$$

Dieser Ausdruck läfst sich mit dem Raumintegral von $\delta\Phi$ zur Deckung bringen; bei der Willkürlichkeit der virtuellen Verrückungen ist es indessen unmöglich, durch diese Arbeit A_1 allein den ganzen Zuwachs der potentiellen Energie zu erklären; mir müssen vielmehr noch andere Arbeitsleistungen suchen, welche das Oberflächenintegral in Gleichung (34) zu erklären vermögen. Dieses stellt ebenfalls eine Unzahl kleinster Summanden dar, von denen jeder mit dem Factor $\delta\xi$ behaftete eine x-Kraft anzeigt, welche dort von aufsen angreift, wo das zugehörige Oberflächenelement liegt. Entsprechend deuten die mit $\delta\eta$ resp. $\delta\zeta$ behafteten Glieder auf y- resp. z-Kräfte. Diese Kräfte können nun nicht von dem Typus der direct die Massen angreifenden Fernkräfte sein, weil ein Flächenstück bei räumlicher Massenverbreitung gar keine Trägheit besitzt. Man müfste gerade annehmen, dafs die Oberfläche des Bereiches mit Masse von endlicher Flächendichtigkeit belegt ist, also mit einem Stoff, der unendlich viel dichter ist, als die Füllung des Bereiches. Wenn nun auch mitunter die Annahme von Substanzen, die auf Flächen verbreitet sind, in der mathematischen Physik von Nutzen

---

[1] Es ist zu beachten, dafs diese Zeichen nun, nicht wie früher, Kräfte, sondern Beschleunigungen bedeuten. Diese Bezeichnungsweise ist bei continuirlichen Massen zweckmäfsiger, weil die Kraft selbst davon abhängt, wie grofs das betrachtete $d\tau$ ist, während die Beschleunigung davon unabhängig ist. Handelt es sich z. B. um die Schwere, so hat man bei passender Lage des Axensystems für den ganzen Bereich $X = Y = 0$, $Z = g$ (constant).

ist, so widerspricht sie doch hier vollkommen unseren der Erfahrung entnommenen Anschauungen über die Beschaffenheit der elastischen Körper. Wir entdecken vielmehr bei der Betrachtung des Oberflächenintegrals die Nothwendigkeit, in unsere Theorie eine neue Art von Kräften einzuführen, welche uns bei den Punktsystemen nicht begegnet sind. Diese Kräfte müssen als direct auf die Oberflächenelemente wirkend vorgestellt werden und müssen letzteren proportional sein, weil jedes der Glieder den Factor ds führt. Im Uebrigen müssen sie die allgemeinen Eigenschaften und Dimensionen aller Kraftgröfsen besitzen, denn sie liefern, wenn ihre Angriffsstelle verschoben wird, Arbeitsgröfsen. Die Componenten der auf ein Oberflächenelement ds von aufsen wirkenden „Flächenkraft" wollen wir bezeichnen durch:

$$X_n \cdot ds, \quad Y_n \cdot ds, \quad Z_n \cdot ds.$$

Durch den Zusatz der Factoren ds erhalten die Zeichen $X_n\, Y_n\, Z_n$ endliche Werthe, welche von der Gröfse der Oberflächenelemente unabhängig sind. Die Indices n sollen andeuten, dafs die Kraft von aufsen auf ein Flächenstück wirkt, dessen ins Innere des angegriffenen Bereiches gerichtete Normale die Richtung n hat. Diese Bedeutung des Index soll im Folgenden stets bei den Flächenkräften gelten.

Bei der virtuellen Verrückung des Elementes ds leistet die eingeführte Kraft die Arbeit $X_n ds \cdot \delta\xi + Y_n ds \cdot \delta\eta + Z_n ds \cdot \delta\zeta$, die Gesammtarbeit A_2 aller Flächenkräfte ist also:

$$A_2 = \iint ds \left\{ [X_n]\, \delta\xi + [Y_n]\, \delta\eta + [Z_n]\, \delta\zeta \right\}. \tag{35a}$$

Nun kann man die Bedingung der Conservativität der inneren Widerstandskräfte gegen die Deformation, also die Forderung $A_1 + A_2 = \delta\,\Phi$ allgemein erfüllen. Man würde den Ausdruck $A_1 + A_2 - \delta\,\Phi = 0$ zu bilden haben nach den Angaben der drei Gleichungen (35), (35a) und (34). Man vereinigt dann beide Raumintegrale und beide Oberflächen in je eines und fafst die Integranden nach den gemeinsamen Factoren $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ zusammen. Dann folgt durch die bereits angegebene Schlufsweise aus der Willkürlichkeit der Verrückungen, dafs der Ausdruck nur dann verschwinden kann, wenn jeder Factor von $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ an jeder Stelle des Gebietes und seiner Begrenzung einzeln gleich Null ist. Dies liefert folgende 6 Gleichungen, welche man durch directen Vergleich von (35) und (35a) mit den beiden Theilen von (34) ablesen kann:

$$\left.\begin{aligned}
\mu X &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2n}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2m}\right)\\
\mu Y &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2n}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial b}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2l}\right)\\
\mu Z &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2m}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2l}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial c}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

$$\left.\begin{aligned}
X_n &= \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)\cos nx + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2n}\right)\cos ny + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2m}\right)\cos nz\\
Y_n &= \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2n}\right)\cos nx + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial b}\right)\cos ny + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2l}\right)\cos nz\\
Z_n &= \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2m}\right)\cos nx + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2l}\right)\cos ny + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial c}\right)\cos nz
\end{aligned}\right\} \quad (36\,a)$$

§ 23. Die Flächenkräfte im Inneren der deformirten Substanz.

Die vorstehenden 6 Gleichungen stellen die zur Erhaltung der Deformation erforderlichen äufseren Kräfte hin als in ganz charakteristischer Weise bedingt durch die 6 partiellen Differentialquotienten der Function φ nach ihren Variabelen $a\ b\ c\ l\ m\ n$. Die Fernkräfte hängen davon ab, in welcher Weise sich im Inneren der Substanz die Werthe jener Differentialquotienten von Ort zu Ort verändern, die Oberflächenkräfte sind bestimmt durch die Werthe der Differentialquotienten selbst und durch die Richtung der Flächenelemente, auf welche sie wirken.

Da wir nun über die Oberfläche unseres Bereiches gar keine beschränkenden Annahmen einführten — wie etwa, dafs sie die reale Grenze sein müfste, längs deren ein Körper an heterogene Gebiete (Luft oder sonst was) anstöfst —, sondern auch jede beliebige nur vorgestellte Umgrenzung im Inneren ausgedehnter Substanz angenommen werden kann, so erscheint es auffällig, dafs unsere Untersuchung die Flächenkräfte gerade dort und nur dort fordert, wo die Grenze des Bereiches gedacht wird, also an ganz willkürlichen Stellen. Die Erklärung besteht darin, dafs thatsächlich diese Flächenkräfte überall in der deformirten Substanz bestehen müssen, dafs sie aber wegen der Gleichheit von Action und Reaction zu den Arbeitsleistungen, welche die Integrale in (34) darstellen, keine Beiträge liefern, vielmehr nur dort auftreten, wo die Action den äufseren Kräften, die Reaction den inneren Kräften zugerechnet werden mufs, d. h. also an der Grenzfläche: Zum Beweise dieser Behauptung dient folgende Ueberlegung.

Nachdem wir die vorangehende Untersuchung für einen irgendwie abgegrenzten, deformirten Bereich durchgeführt haben, denken wir uns eine beliebige Schnittfläche durch sein Inneres gelegt, welche ihn in zwei Theile I und II theilt. Diese Fläche soll nur eine mathematische Fiction sein, nicht etwa den festen cohäsiven mechanischen Zusammenhang der Massen zerstören. Dann kann man dieselbe Untersuchung für Bereich I allein und für Bereich II allein durchführen. Das Raumintegral und das Flächenintegral in Gleichung (34) wird jedes dadurch auch in zwei Theile zerschnitten. Es tritt aber für jeden Theilbereich in dem Ausdruck für $\delta\,\Phi_{\mathrm{I}}$ resp. $\delta\,\Phi_{\mathrm{II}}$ noch ein Integral über die Schnittfläche hinzu, da diese jetzt ein Stück der Begrenzung bildet. Durch eben die Schlufsweise, welche uns zu den Gleichungen (36) und (36a) geführt hatte, findet man jetzt noch folgende Forderungen: Um den Bereich I für sich allein deformirt in Ruhe zu halten, mufs man aufser den vorher schon gefundenen äufseren Fern- und Oberflächenkräften noch Flächenkräfte $\bar{X}_{n_{\mathrm{I}}}\cdot\overline{ds}$, $\bar{Y}_{n_{\mathrm{I}}}\cdot\overline{ds}$, $\bar{Z}_{n_{\mathrm{I}}}\cdot\overline{ds}$ auf die Schnittfläche wirken lassen, deren Beträge sind:

$$\bar{X}_{n_{\mathrm{I}}} = \left(-\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial a}\right)\cos n_{\mathrm{I}}x + \left(-\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial\, 2\,n}\right)\cos n_{\mathrm{I}}y + \left(-\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial\, 2\,m}\right)\cos n_{\mathrm{I}}z \qquad (37\,\mathrm{I})$$

$\bar{Y}_{n_{\mathrm{I}}}$ und $\bar{Z}_{n_{\mathrm{I}}}$ analog.

Die Balken über den Gröfsen sollen einstweilen andeuten, dafs es deren Werthe an der Schnittfläche sein sollen.

Um den Bereich II für sich allein deformirt in Ruhe zu halten, mufs man noch zusetzen Flächenkräfte $\bar{X}_{n_{\mathrm{II}}}\cdot\overline{ds}$, $\bar{Y}_{n_{\mathrm{II}}}\cdot\overline{ds}$, $\bar{Z}_{n_{\mathrm{II}}}\cdot\overline{ds}$, wo

$$\bar{X}_{n_{\mathrm{II}}} = \left(-\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial a}\right)\cos n_{\mathrm{II}}x + \left(-\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial\, 2\,n}\right)\cos n_{\mathrm{II}}y + \left(-\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial\, 2\,m}\right)\cos n_{\mathrm{II}}z. \qquad (37\,\mathrm{II})$$

$\bar{Y}_{n_{\mathrm{II}}}$ und $\bar{Z}_{n_{\mathrm{II}}}$ analog.

Da wir diese Kräfte vor der Theilung des ganzen Bereiches nicht aufgefunden haben, so mufs man folgern, dafs der feste Zusammenhang der Substanz längs der idealen Schnittfläche für den Bereich I die gleiche Wirkung thut, als wenn man den Bereich II fortgenommen denkt, dafür aber die Kräfte (37 I) anbringt. Mit anderen Worten heifst dies aber, II übt auf I diese Kräfte aus.

Ebenso wird das Gleichgewicht des Bereiches II nicht gestört, wenn man den Bereich I wegnimmt und statt dessen die Kräfte (37 II) anbringt, also I übt auf II diese Kräfte aus.

Dafs die Kräfte (37 II) denen (37 I) entgegengesetzt gleich sind, erkennt man leicht, denn die $\overline{\partial \varphi / \partial a}$ etc. haben als stetige Functionen des Ortes für beide Seiten der Schnittfläche die gleichen Werthe, die Richtungscosinus von n_{II} aber sind denen von n_{I} entgegengesetzt gleich. Nun können wir in der Bezeichnung der Gröfsen die Balken und auch die rein äufserliche Numerirung I und II weglassen. Dadurch werden die Gleichungen (37 I und II) identisch mit einander und auch mit den Gleichungen (36 a), und wir können das Resultat dieser Betrachtung zusammenfassen in folgendem Satze: Nimmt man im Inneren eines deformirten Körpers ein Flächenelement ds an und errichtet darauf nach einer Seite (gleichgültig welcher) die Normale n, so erfährt die auf dieser Seite gelegene Masse durch ihren Zusammenhang mit der auf der anderen liegenden Masse eine Flächenkraft $X_n\, ds$, $Y_n\, ds$, $Z_n\, ds$, welche bestimmt wird durch

$$\left.\begin{aligned}
X_n &= \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)\cos n x + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2 n}\right)\cos n y + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2 m}\right)\cos n z \\
Y_n &= \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2 n}\right)\cos n x + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial b}\right)\cos n y + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2 l}\right)\cos n z \\
Z_n &= \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2 m}\right)\cos n x + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial 2 l}\right)\cos n y + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial c}\right)\cos n z.
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Diese Gleichungen führen die inneren Flächenkräfte zurück auf die Structur des Körpers (Gestalt der Function φ) und auf die Art der Deformation (Variabele $a\ b\ c\ l\ m\ n$, von denen die Werthe der Differentialquotienten von φ abhängen). Von der Richtung des Flächenelementes, also von n sind diese Kräfte ebenfalls abhängig, und es ist für den Ueberblick wichtig, dieser Normalen, also auch der Fläche ds, die durch das Coordinatensystem ausgezeichneten drei Richtungen zu geben.

1. Das Flächenelement liege normal zur x-Richtung, welche positiv nach rechts genommen werde. Dann ist die Kraft, welche auf die rechts von ds gelegenen Theilchen von links her wirkt, aus vorstehenden Formeln (38) abzuleiten, indem man $n = +x$ setzt; auch die Indices n an den Kraftcomponenten sind durch x zu ersetzen, so dafs von nun ab X_x, Y_x, Z_x Zeichen von fester Bedeutung sind.

Da $\cos(x, x) = 1$, $\cos(x, y) = \cos(x, z) = 0$, erhält man

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial a} \\ Y_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial 2n} \\ Z_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial 2m}. \end{aligned}\right\} \qquad (38_x)$$

Die entgegengesetzte Kraft, welche auf die links von ds gelegenen Theilchen von rechts herwirkt, würde man durch die Annahme $n = -x$ in (38) finden, $\cos(-x, x) = -1$, doch ist dies, ebenso wie die Einführung von X_{-x}, Y_{-x}, Z_{-x} als Zeichen von bleibender Bedeutung überflüssig, da wir schon wissen, dafs diese den vorigen entgegengesetzt gleich sein müssen:

$$X_{-x} = -X_x, \quad Y_{-x} = -Y_x, \quad Z_{-x} = -Z_x. \qquad (38_{-x})$$

2. Das Flächenelement liege normal zur y-Richtung, welche positiv in der Richtung des Blickes genommen werde. Dann ist die Kraft, welche auf die von uns aus hinter ds liegenden Theilchen seitens der uns näher liegenden ausgeübt wird, durch die Bestimmung $n = +y$ zu finden. Dadurch wird $\cos(nx) = 0$, $\cos(ny) = 1$, $\cos(nz) = 0$, und

$$\left.\begin{aligned} X_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial 2n} \\ Y_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial b} \\ Z_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial 2l}. \end{aligned}\right\} \qquad (38_y)$$

Die Reaction gegen diese ist:

$$X_{-y} = -X_y, \quad Y_{-y} = -Y_y, \quad Z_{-y} = -Z_y. \qquad (38_{-y})$$

Die Zeichen X_y, Y_y, Z_y sollen künftig diese feste Bedeutung behalten, X_{-y} etc. sind entbehrlich.

3. Das Flächenelement liege normal zur z-Richtung, welche positiv nach oben gehe. Die Kraft, welche auf die über ds liegenden Theilchen von unten her wirkt, findet man aus $n = +z$, $\cos(nx) = \cos(ny) = 0$, $\cos(nz) = 1$ in folgenden Ausdrücken

$$\left.\begin{aligned} X_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial 2m} \\ Y_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial 2l} \\ Z_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial c}. \end{aligned}\right\} \qquad (38_z)$$

Die Reaction dagegen:

$$X_{-z} = -X_z, \quad Y_{-z} = -Y_z, \quad Z_{-z} = -Z_z. \qquad (38_{-z})$$

Auch X_z, Y_z, Z_z sollen künftig diese Bedeutung behalten.

Diese 9 Gleichungen (38_x, $_y$, $_z$) enthalten wichtige Aussagen. Erstens findet man in ihnen anschauliche Bedeutungen für die sechs negativen Differentialquotienten von φ, zweitens erkennt man aus der Identität der rechten Seiten der betreffenden Gleichungen, daſs nothwendig

$$Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x \qquad (38_t)$$

sein muſs. Um diese Aussagen für späteren Gebrauch übersichtlich zusammenzustellen, schreiben wir sie noch einmal in folgender Anordnung

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial a} \\ Y_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial b} \\ Z_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial c}. \end{aligned}\right\} \quad (39) \qquad \left.\begin{aligned} Y_z = Z_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial 2l} \\ Z_x = X_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial 2m} \\ X_y = Y_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial 2n}. \end{aligned}\right\} \quad (39\,\mathrm{a})$$

Es würde nicht zweckmäſsig sein, von den zwei dem Werthe nach gleichen Zeichen Y_z und Z_y das eine künftig zu vermeiden, vielmehr soll, je nachdem eine Kraft in der y- oder z-Richtung gemeint ist, das erste oder zweite gesetzt werden. Die Gleichungen (39) und (39a) können dazu dienen, aus den für die äuſseren Kräfte gefundenen Ausdrücken (36) und (36a) und aus den mit (36a) formell identischen Ausdrücken (38) für die inneren Flächenkräfte die 6 Differentialquotienten von φ in einfachster Weise zu eliminiren, indem man an Stelle von $(-\partial \varphi / \partial a)$ das Zeichen X_x etc. setzt. Dabei kann man nicht in Zweifel kommen, welches der beiden Zeichen man z. B. für $(-\partial \varphi / \partial 2l)$ zu wählen hat: In der zweiten Gleichung, welche offenbar eine Relation zwischen y-Kräften ausdrückt, ist Y_z zu nehmen, in der dritten, welche z-Kräfe bestimmt, ist Z_y zu nehmen. So erhält man folgende Kraftgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mu X &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ \mu Y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ \mu Z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

$$\left.\begin{aligned}X_n &= X_x \cos n x + X_y \cos n y + X_z \cos n z \\ Y_n &= Y_x \cos n x + Y_y \cos n y + Y_z \cos n z \\ Z_n &= Z_x \cos n x + Z_y \cos n y + Z_z \cos n z .\end{aligned}\right\} \quad (40\,\mathrm{a})$$

§ 24. Elementare Veranschaulichung der gewonnenen Resultate.

Die vorstehenden 3 Gleichungen (40) zeigen an, dafs die elastische Reaction gegen die Fernkräfte durch die inneren Flächenkräfte zu Stande kommt. Um dies anschaulich zu machen, pflegt man ein rechtwinkliges Volumelement $dx \cdot dy \cdot dz$ im Inneren der deformirten Substanz zu betrachten und für dieses die elementaren Forderungen des Gleichgewichtes aufzustellen, dafs nämlich erstens die geometrische Summe aller angreifenden Kräfte gleich Null sein mufs, damit der Schwerpunkt des Massenelementes keine resultirende Beschleunigung erfahre, und dafs zweitens kein resultirendes Drehungsmoment übrig bleibe.

Die erste Bedingung wird dadurch erfüllt, dafs man zuerst alle x-Kräfte zusammensucht und deren Summe gleich Null setzt. Da haben wir zunächst die Fernkraft, deren x-Componente wir wie früher bezeichnen:

$$X \cdot \mu \cdot dx\,dy\,dz .$$

Dazu kommen nun die x-Componenten aller Flächenkräfte auf die sechs Rechtecke, die das Raumelement begrenzen. Diese Flächenelemente haben die Lage normal zu den Axen x, y, z, also werden durch X_x, X_y, X_z direct diese Flächenkräfte angegeben. Die beiden Rechtecke normal zu x haben die Gröfse $ds = dy \cdot dz$, zur rechts gelegenen gehört eine um dx gröfsere Abscisse als zur linken. Hat also die Flächenkraft an der linken Seite den Werth X_x, so wird an der rechten Seite der Werth $X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} \cdot dx$ gelten, denn X_x mufs differenzirbare Function des Ortes sein, es ist ja gleich $-\partial \varphi / \partial a$. An der linken Fläche folgt die ins Innere des Volumelementes gerichtete Normale der positiven x-Richtung, also ist $X_x \cdot dy\,dz$ die x-Componente der links angreifenden Flächenkraft. Ist diese positiv, so drängt sie das Massenelement nach rechts, sie ist eine **normale Druckkraft**. An der rechten Fläche ist $n = -x$, also haben wir X_{-x} oder, wie wir statt dessen schreiben dürfen, $-X_x$ einzuführen, aber mit dem durch den Schritt dx veränderten Werth. Die x-Kraft auf die rechte Fläche ist also $-\left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx\right) \cdot dy\,dz$. Diese wird das Massenelement bei positivem Werth von X_x nach links drängen, und wenn auch $\partial X_x/\partial x$ positiv ist, sogar noch etwas stärker nach links drängen, als die gegenüberliegende Wand nach rechts gedrängt wird, so daſs ein Ueberschuſs vom Betrage

$$-\frac{\partial X_x}{\partial x} dx \cdot dy\,dz$$

wirksam übrig bleibt.

Die beiden Flächen normal auf y haben die Gröſse $dz \cdot dx$. Die uns zugekehrte (vordere) hat $n = +y$, also wirkt auf sie die Componente $X_y\,dz\,dx$. Wenn X_y einen positiven Werth hat, so bedeutet dies eine tangentiale Schubkraft, welche, die vordere Wand angreifend, das Körperelement nach rechts zu schieben strebt. Die uns abgewandte Gegenfläche liegt um den Schritt $+dy$ weiter, ihre innere Normale ist $n = -y$, mithin die dort angreifende Kraftcomponente $-\left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy\right) \cdot dz\,dx$. Diese strebt dann das Element nach links zu schieben, und wenn $\partial X_y/\partial y$ positiv ist, ist dieser Schub noch etwas kräftiger als der entgegengesetzte. Der Ueberschuſs

$$-\frac{\partial X_y}{\partial y} dy \cdot dz\,dx$$

bleibt in Wirksamkeit.

Für das dritte Flächenpaar $dx \cdot dy$ gilt eine ganz analoge Betrachtung. Die untere und die obere Grenzfläche werden von entgegengesetzten Schubkräften angegriffen, wegen der Veränderlichkeit der Gröſse X_z in der z-Richtung bleibt als wirksam zurück eine Kraft

$$-\frac{\partial X_z}{\partial z} dz \cdot dx\,dy.$$

Dies sind alle x-Kräfte, welche man zusammensuchen kann. Setzt man, wie verlangt, deren Summe gleich Null, so erhält man nach Weghebung der gemeinsamen Factoren $dx \cdot dy \cdot dz$ die Gleichgewichtsbedingung:

$$\mu X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0.$$

Diese ist identisch mit der ersten der Gleichungen (40). In ganz gleicher Weise muſs man die algebraischen Summen der zusammengesuchten y- bezw. z-Kräfte gleich Null setzen und findet dadurch

Gleichgewichtsbedingungen, welche sich mit der zweiten, bezw. dritten der Gleichungen (40) decken.

Wir schreiten nun zur Erfüllung der zweiten elementaren Gleichgewichtsbedingung für die Drehungsmomente; zu diesem Zwecke genügt es zu fordern, dafs um keine der drei Coordinataxen ein Drehungsmoment besteht. Die Fernkraft auf die träge Masse kann kein Drehungsmoment erzeugen, auch die drei normalen Druckkräfte X_x, Y_y, Z_z, können dies nicht. Dagegen liefert jede der sechs tangentialen Schubkräfte ein solches. Diese müssen sich also nothwendig gegenseitig vernichten, wenn überhaupt ruhende Deformation möglich sein soll, und wenn die Auffindung der wirkenden Kräfte eine erschöpfende war. Suchen wir zunächst diejenigen Kräftepaare, deren Drehungsaxe in die x-Richtung fällt. In Figur 6 ist die positive

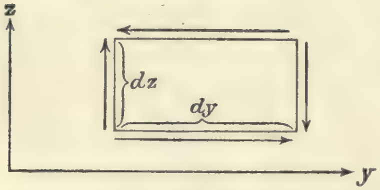

Fig. 6.

x-Axe gegen den Beschauer gekehrt senkrecht auf dem Papier zu denken, die positive y-Axe nach rechts, die positive z-Axe nach oben gerichtet. Das Volumelement stellt sich in der Figur als Rechteck dar, die horizontalen Strecken von der Länge dy sollen die beiden Seitenflächen $dx \cdot dy$, die verticalen von der Länge dz die beiden Seitenflächen $dx \cdot dz$ vorstellen, die in der Ebene der Zeichnung liegenden tangentialen Schubkräfte sind unter der Annahme, dafs die Zeichen Y_z und Z_y positive Werthe darstellen, durch Pfeile angedeutet. Die beiden horizontalen Pfeile, also das Kräftepaar $\pm Y_z \cdot dx\,dy$, haben den Abstand dz von einander, sie greifen daher das Massenelement an mit dem Drehungsmoment (Kraft $\times$ Hebelarm)

$$+ Y_z \cdot dx\,dy \cdot dz.$$

Der Sinn dieser Drehung ist bei positivem Y_z positiv, wie man aus der Figur abliest. Die beiden verticalen Pfeile, also das Kräftepaar $\mp Z_y \cdot dx\,dz$, haben den Abstand dy von einander, ihr Drehungsmoment ist also

$$- Z_y \cdot dx\,dz \cdot dy.$$

Der Sinn dieser Drehung ist bei positivem Z_y negativ, wie die Figur zeigt. Weitere Drehungsmomente um eine Axe in der x-Richtung sind nicht aufzufinden, wir fordern also, dafs die beiden vorstehenden zusammen gleich Null sind. Das giebt nach Weglassung der gemeinsamen Factoren $dx\,dy\,dz$ die Bedingung

$$Y_z - Z_y = 0.$$

In analoger Weise kann man durch Aufstellung der beiden Drehungsmomente um die y- bezw. z-Axe und Nullsetzung ihrer Summe finden:

$$Z_x - X_z = 0 \quad \text{bezw.} \quad X_y - Y_x = 0.$$

Diese Resultate stimmen überein mit den früher auf anderem Wege gefundenen (38t).

Eine besondere Betrachtung erfordert das Gleichgewicht derjenigen Volumelemente, deren Begrenzung zum Theil durch die äufsere Oberfläche des Bereiches gebildet wird, weil dort die äufseren Flächenkräfte mit ins Spiel kommen. Einem solchen Theilchen kann man die Gestalt einer dreikantigen Pyramide (abgeschnittenen Würfelecke) geben, die Hypotenusenfläche ist dann ein dreieckiges Oberflächenelement ds, die Kathetenflächen ds_x, ds_y, ds_z sind rechtwinklige Dreiecke, deren Flächeninhalt mit Hülfe der Richtungscosinus der inneren Normalen auf ds gefunden wird. Um die sinnliche Vorstellung irgendwie festzulegen, wollen wir annehmen die Winkel (nx), (ny), (nz) seien alle stumpf, dann mufs man, um positive Ausdrücke zu erhalten, überall ein Minuszeichen zur Compensation der negativen Cosinus zu setzen:

$$ds_x = -ds \cos nx$$
$$ds_y = -ds \cos ny$$
$$ds_z = -ds \cos nz.$$

Bei dieser Lage von n folgen die ins Innere der Pyramide gerichteten Normalen auf allen drei Kathetenflächen den positiven Coordinatenrichtungen, die dort angreifenden inneren Flächenkräfte sind deshalb $X_x ds_x$, $X_y ds_y$, ... $Z_z ds_z$, oder wenn man vorstehende Formeln einsetzt

$$-X_x ds \cdot \cos nx, \quad -X_y ds \cos ny, \ldots, \quad -Z_z ds \cos nz.$$

Würde man über die Richtung von n andere Annahmen gemacht haben, z. B. (nx) spitz, so wäre $ds_x = +ds \cos nx$ zu setzen, dann würde aber die Normale auf ds_x in Richtung $-x$ fallen, folglich $X_{-x} \equiv -X_x$ einzuführen sein, die Flächenkraft würde dann ebenfalls $-X_x ds \cos nx$ etc. lauten. Man sieht daraus: Wie auch n gerichtet sein mag, es tritt in den Ausdrücken der Flächenkräfte immer ein Minuszeichen explicite heraus. Um die Fernkraft auszudrücken, müssen wir die in der Pyramide eingeschlossene Masse kennen. Das Volumen $d\tau$ berechnet man mittelst des Lothes, d. h. aus der rechtwinkligen Ecke auf die Basis ds nach der Formel

$$d\tau = \tfrac{1}{3} ds \cdot dh.$$

Die Componenten der Fernkraft sind dann:

$$\mu X \cdot \tfrac{1}{3} ds\, dh, \quad \mu Y \cdot \tfrac{1}{3} ds\, dh, \quad \mu Z \cdot \tfrac{1}{3} ds\, dh.$$

Nun erfüllen wir die Gleichgewichtsbedingungen dieser Pyramide wieder dadurch, dafs wir zuerst alle x-Kräfte zusammensuchen. Wir finden folgende

1. Die äufsere Flächenkraft $X_n\, ds$
2. Die inneren Flächenkräfte $-X_x\, ds \cos nx$
   $-X_y\, ds \cos ny$
   $-X_z\, ds \cos nz$
3. Die äufsere Fernkraft $\mu X \cdot \tfrac{1}{3} ds \cdot dh.$

Deren Summe gleich Null gesetzt liefert nach Wegheben des gemeinsamen Factors ds die Gleichung

$$X_n - X_x \cos nx - X_y \cos ny - X_z \cos nz + \mu X \cdot \frac{dh}{3} = 0.$$

Während die ersten vier Glieder dieses Ausdruckes im Allgemeinen von endlicher Gröfse sind, und auch endlich bleiben, wenn man die Pyramide unendlich klein werden läfst, ist das letzte Glied mit dem Factor dh behaftet, verschwindet also beim Uebergang zur Grenze, d. h. auf das Gleichgewicht zwischen den äufseren Flächenkräften und den inneren Reactionen gegen die Deformation an der Begrenzung haben die Fernkräfte keinen Einflufs. Durch Vernachlässigung dieses letzten Gliedes wird vorstehende Bedingung identisch mit der ersten der Gleichungen (40a). Ganz analog hat man mit den Kräften in der y- und z-Richtung zu verfahren, und findet Bedingungen, welche bis auf verschwindend kleine Glieder $\mu Y \cdot dh/3$ und $\mu Z \cdot dh/3$ identisch mit (40a) sind.

Ein Fall wäre mathematisch denkbar, in welchem der Einflufs der Fernkraft nicht verschwindet, wenn nämlich beim Uebergang zur Grenze $dh = 0$ das Product $\mu \cdot dh/3$ einen endlichen Grenzwerth behält, den man dann als Flächendichtigkeit einer Massenbelegung der Oberfläche anzusehen hätte. Physikalisch ist dieser Fall indessen, wie schon oben einmal bemerkt wurde, in der hier behandelten Theorie ausgeschlossen.

Die zweite, auf die Drehungsmomente bezügliche, Gleichgewichtsbedingung könnte man ebenfalls noch auf die Elementarpyramide anwenden, doch findet man dabei nichts Neues, sondern ebenfalls die Bedingungen $Y_z = Z_y$ etc.

Die Betrachtungen dieses Paragraphen wurden nicht angestellt um neue Resultate aufzufinden, wir fanden ja auf Schritt und Tritt dieselben Gleichungen wieder, welche vorher bereits aus dem Begriff der potentiellen Energie der conservativen elastischen Kräfte mit Hülfe des Princips der virtuellen Verrückungen abgeleitet worden waren. Der Zweck war vielmehr zu zeigen, dafs alle Kraftäufserungen eines deformirten Körpers hergeleitet werden können aus den Werthen der 6 Coordinatenfunctionen X_x, Y_y, Z_z, $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$, $X_y = Y_x$. Der Beweis für diese Behauptung lag in der Uebereinstimmung der Resultate mit den Gleichungen (40), 40a), (38t). Diese 6 Gröfsen bestimmen den Strefs, ebenso wie die 6 kleinen Zahlen a, b, c, l, m, n den Strain bestimmen. Häufig wird in anderen Lehrbüchern der in diesem Paragraphen verfolgte Weg als der ursprüngliche und auch elementarere zur Aufstellung der betreffenden Kraftgleichungen benützt. Bei solcher Absicht mufs man aber die Existenz der inneren Flächenkräfte von vornherein postuliren, oder wie die Moleculartheorie es thut, sie durch Centralkräfte zwischen den sehr nahe aneinander liegenden directen Massenpunkten diesseits und jenseits einer gedachten Fläche erklären.

§ 25. Haupt-Drucke.

Wir wissen jetzt, dafs die 6 Werthe, welche in den 9 Zeichen X_x, Y_y, Z_z, $Y_z = Z_y$, $Z_x = X_z$, $X_y = Y_x$ stecken, den Stress in einem deformirten Körper völlig bestimmen, indem man durch die Gleichungen (40) und (40a) aus ihnen alle Kraftwirkungen bestimmen kann. Die letzteren Gleichungen (40a) wollen wir jetzt noch zu einer besonderen Betrachtung heranziehen. Durch die Componenten X_n, Y_n, Z_n ist Gröfse und Richtung der resultirenden Kraft R_n bestimmt, welche auf eine Flächeneinheit mit der Normale n einwirkt. Im Allgemeinen wird die Resultante nicht mit n gleichgerichtet sein, sondern schräg auf der Fläche stehen. Wir stellen uns jetzt die Frage: Wie findet man bei fester Vorschrift der 6 Stressdaten $X_x \ldots$, solche Richtungen der Normale n, für welche die Fläche von einer normalen Resultante angegriffen wird? Für solche Richtungen müssen die besonderen Bedingungen erfüllt sein: $X_n = R_n \cos n x$,

$Y_n = R_n \cos n y$, $Z_n = R_n \cos n z$, weil nämlich dann n auch die Richtung von R_n angiebt. Setzt man diese in (40a), so folgt:

$$\left.\begin{aligned} (X_x - R_n)\cos n x + X_y \cos n y + X_z \cos n z &= 0 \\ Y_x \cos n x + (Y_y - R_n)\cos n y + Y_z \cos n z &= 0 \\ Z_x \cos n x + Z_y \cos n y + (Z_z - R_n)\cos n z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{41a}$$

Diese Gleichungen enthalten gewisse Forderungen an die gesuchte Richtung n und den Werth des R_n. Sie sind anzusehen als homogene lineare Gleichungen für die drei Richtungscosinus. Dafs letztere nicht unabhängig sind, indem ihre Quadratsumme gleich 1 sein mufs, schadet wegen der Nullen auf den rechten Seiten nichts. Man könnte ja eine beliebige Strecke n abmessen, deren Projectionen mit x, y, z bezeichnet werden, dann könnte man setzen

$$\cos n x = \frac{x}{n}, \quad \cos n y = \frac{y}{n}, \quad \cos n z = \frac{z}{n}$$

und dann könnte man in allen drei Gleichungen die Nenner n streichen, hätte also thatsächlich drei unabhängige Unbekannte. Damit die Gleichungen (41 a) überhaupt erfüllbar seien, mufs die Determinante ihrer Coefficienten verschwinden. Das giebt für die Intensität R_n die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} (X_x - R_n) & X_y & X_z \\ Y_x & (Y_y - R_n) & Y_z \\ Z_x & Z_y & (Z_z - R_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{41b}$$

Nun aber brauchen wir nicht weiter zu rechnen, denn genau das gleiche mathematische Problem haben wir mit anderen Bezeichnungen bereits beim Studium der Deformationen eingehend behandelt. Unsere drei Gleichungen (41 a) entsprechen (13 a), die Nullforderung unserer Determinante (41 b) entspricht (13 b und c). Wir können daher alle Resultate aus § 10 direct hierher übertragen, wenn wir setzen:

R_n statt σ, X_x statt a, Y_y statt b, Z_z statt c, Y_z oder Z_y statt l, Z_x oder X_z statt m, X_y oder Y_x statt n.

Die cubische Gleichung, welche nach Entwickelung der Determinante in (41 b) entsteht, hat also stets drei reelle Wurzeln R_{n_1} R_{n_2} R_{n_3}, für jede ergeben dann die Gleichungen (41 a) eine bestimmte Richtung der Flächennormale, diese drei Richtungen n_1, n_2, n_3 müssen alle senkrecht auf einander stehen, wenigstens kann man dies immer deutlich erkennen, wenn die drei Wurzeln verschiedene Werthe haben. Diese $R_{n_1}\, R_{n_2}\, R_{n_3}$ nennt man die Haupt-Drucke, die zugehörigen Richtungen $n_1\, n_2\, n_3$ die Haupt-Druck-Axen; man kann auch sagen Hauptaxen des Stress, dementsprechend kann man auch die Haupt-Dilatations-Richtungen die Hauptaxen des Strain nennen.

Man kann nun ferner nach dem Vorbilde des § 11 eine Synthese des allgemeinen Stress aus den drei Haupt-Drucken durch Beziehung auf ein beliebig gedrehtes Coordinatensystem herleiten und findet dabei die folgenden Gleichungen, welche den Gleichungen (15) völlig analog sind und in denen hier dieselbe Abkürzung für die Summe dreier Glieder mit den Indices 1, 2, 3 gebraucht ist:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \sum_{1,2,3} R_{n_1} \cdot \cos^2(n_1 x), & Y_z = Z_y &= \sum R_{n_1} \cos(n_1 y) \cos(n_1 z) \\ Y_y &= \sum R_{n_1} \cdot \cos^2(n_1 y), & Z_x = X_z &= \sum R_{n_1} \cos(n_1 z) \cos(n_1 x) \\ Z_z &= \sum R_{n_1} \cdot \cos^2(n_1 z), & X_y = Y_x &= \sum R_{n_1} \cos(n_1 x) \cos(n_1 y). \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Man kann schliefslich in völliger Analogie mit den Betrachtungen des § 14 den allgemeinen Stress auch zerlegen in einen nach allen Richtungen gleichmäfsig wirkenden (hydrostatischen) Druck, der — je nachdem — positiv oder negativ ausfällt, dessen Gröfse gegeben ist durch den Mittelwerth:

$$\frac{R_{n_1} + R_{n_2} + R_{n_3}}{3} = \frac{X_x + Y_y + Z_z}{3},$$

und dazutretend zwei rein tangentiale Schub-Kräftepaare, deren Gröfse nur durch die Differenzen zwischen den Hauptdrucken bedingt wird. Auch liegen die Flächen, auf welche diese reinen Scheerungskräfte wirkend zu denken sind, wie die Flächen eines regulären Rhomben-Dodekaeders, dessen Axen die Hauptaxen des Stress sind.

Bei all diesem formalen Parallelismus ist jedoch ausdrücklich darauf hinzuweisen, dafs im Allgemeinen bei anisotropen Körpern die Richtungen der Haupt-Dilatationen mit denen der Haupt-Drucke nicht zusammenfallen. Auch erzeugt in solchen Körpern ein nach allen Seiten gleichmäfsiger Druck nicht eine reine Volumveränderung, als deren Analogon er doch soeben betrachtet wurde, sondern auch Gestaltveränderungen. Bei den isotropen Körpern, von denen wir später besonders zu handeln haben werden, trifft freilich beides zu:

Sowohl die Uebereinstimmung der Hauptaxen von Strain und Stress, als auch die reine Volumveränderung durch ungerichteten Druck. Näheres darüber folgt in § 33.

§ 26. Gleichgewicht der elastischen Kräfte an der Grenze heterogener Substanzen.

Die partielle Integration des Ausdruckes $\delta\,\Phi$ in Gleichung (32a) war der wichtigste Schritt zur Auffindung der elastischen Kräfte. Diese Umformung wurde in § 21 ausgeführt unter der Annahme, daſs die im Integrandus auftretenden 6 partiellen Differentialquotienten von φ im ganzen Bereiche stetige Functionen des Ortes sind. Jetzt soll die Betrachtung ergänzt werden für den Fall, daſs eine Fläche den Bereich durchsetzt, an welcher die genannten 6 Functionen unstetig verlaufen. Diese Erscheinung hat man im Allgemeinen zu erwarten, wenn ein continuirlich mit Masse erfüllter Bereich aus zwei heterogenen oder verschieden structurirten Substanzen zusammengesetzt ist, welche längs dieser Fläche an einanderstoſsen. Denn φ und dessen Differentialquotienten sind als Functionen der 6 Deformationsdaten anzusehen mit Coefficienten, welche von der Natur jedes einzelnen Körpers abhängen, also zu beiden Seiten der Grenze endlich verschiedene Werthe haben, selbst a, b, c, l, m, n können in beiden sich berührenden Körpern verschieden sein. Die virtuellen Verrückungen $\delta\,\xi$, $\delta\,\eta$, $\delta\,\zeta$ aber sollen im ganzen Bereich, auch an der Unstetigkeitsfläche, stetig und differenzirbar sein. Wir verfolgen denselben Gedankengang wie auf Seite 68 bis 70.

Die Gleichung (33) bleibt auch jetzt richtig, wenn man nur den Schritt dx, den man doch immer ausgeführt denken muſs, um einen Differentialquotienten $\partial/\partial\,x$ zu finden, nicht durch die Unstetigkeitsfläche hindurchsetzt, sondern nur bis heran an diese von beiden Seiten.

Nennen wir für irgend ein bestimmtes Flächenelement $d\,y \cdot d\,z$ die Abscisse der Sprungfläche $\bar{x}$, so muſs die Integration nach x am ersten Gliede rechts ausgeführt werden von der unteren Grenze x_0 bis dicht an die Sprungstelle, sagen wir bis $\bar{x} - \varepsilon$, dann weiter von $\bar{x} + \varepsilon$ bis zur oberen Grenze x_1. Nachher kann man ε gegen Null streben lassen. Man erhält so:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial\,x}\left(\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,a}\,\delta\,\xi\right) \cdot d\,x = \int\limits_{x_0}^{\bar{x}-\varepsilon} + \int\limits_{\bar{x}+\varepsilon}^{x_1}\,, \; \lim \varepsilon = 0.$$

$$= \overline{\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,a}\,\delta\,\xi}\,\Bigg|_{x_0}^{\bar{x}-\varepsilon} + \overline{\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,a}\,\delta\,\xi}\,\Bigg|_{\bar{x}+\varepsilon}^{x_1}.$$

Bezeichnet man die Sprunggröfse von $\partial\varphi/\partial a$, d. h. deren Werth rechts vom Sprung $(\bar{x}+\varepsilon)$ minus dem Werthe links vom Sprung $(\bar{x}-\varepsilon)$ mit $\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial a}}$, so kann man vorstehenden Ausdruck auch schreiben:

$$= \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial a}\delta\xi}_{x_0}^{x_1} - \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial a}}\,\delta\xi_{\bar{x}}\,.$$

Folglich erhält man an Stelle von Gleichung (33 a)

$$\iiint d\tau\,\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial\delta\xi}{\partial a}$$

$$= \iint dy\,dz\,\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial a}\delta\xi}_{x_0}^{x_1} - \iint dy\,dz\,\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial a}}\,\delta\xi_{\bar{x}} - \iiint d\tau\,\frac{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial a}}{\partial x}\,\delta\xi. \tag{33 a}$$

Das erste Doppelintegral rechts ist genau wie in § 21 in ein Oberflächenintegral über die äufsere Begrenzung des Bereiches umzuwandeln, es erhält dadurch die Gestalt

$$-\iint ds\,\frac{\partial\varphi}{\partial a}\cos nx\cdot\delta\xi\,.$$

Dafs dabei gewisse Oberflächenelemente an den Stellen liegen, wo die Sprungfläche durchtritt, mithin dort $\partial\varphi/\partial a$ unstetig wird, stört Sinn und Werth dieses Integrales nicht. Einen Unterschied gegen die frühere Betrachtung bildet nur das Auftreten des zweiten Doppelintegrales, welches man umwandeln kann in ein Integral über die Unstetigkeitsfläche. Wählt man nämlich die Elemente $\overline{ds}$ dieser Fläche so, dafs deren Projectionen sich mit den $dy\cdot dz$ decken, und nennt man die Normale nach der Seite hinter dem Sprunge $\bar{n}$, so ist

$$dy\cdot dz = \overline{ds}\cdot\cos.\bar{n}x.$$

Wir wollen hier der Kürze wegen die einfache Annahme machen, dafs die Winkel $(\bar{n}\,x)$ an allen Stellen spitz seien, und damit zugleich die Complication beseitigen, dafs sich mehrere $\overline{ds}$ auf das gleiche $dy\cdot dz$ projiciren, oder was gleichbedeutend ist, dafs gewisse Parallelen der x-Axe die Sprungfläche mehrmals durchstechen. Solche Verhältnisse, die sehr wohl vorkommen können, erschweren indessen nur den mathematischen Ausdruck, ändern aber an dem physikalischen Sinn der Ueberlegung nichts. Das zweite Oberflächen-integral lautet also:

$$-\iint \overline{ds} \cdot \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial a}} \cos \bar{n}\, x \cdot \delta \xi_{\bar{x}}$$

und wir erhalten an Stelle von Gleichung (33 b) die folgende:

$$\iiint d\tau \frac{\partial \varphi}{\partial a} \cdot \frac{\partial \delta \xi}{\partial a} = -\iint ds \frac{\partial \varphi}{\partial a} \cos n x \, \delta \xi - \iint \overline{ds}\, \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial a}} \cos \bar{n}\, x\, \delta \xi_{\bar{x}}$$
$$- \iiint d\tau \frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial a}}{\partial x} \delta \xi. \qquad (\overline{33\,\mathrm{b}})$$

Hätten wir ein anderes der 9 Glieder von $\delta \Phi$ zur Vorführung der partiellen Integration gewählt, so hätten wir z. B. gefunden:

$$\iiint d\tau \frac{\partial \varphi}{\partial 2l} \cdot \frac{\partial \delta \eta}{\partial z} = -\iint ds \frac{\partial \varphi}{\partial 2l} \cos n z \cdot \delta \eta - \iint \overline{ds}\, \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial 2l}} \cos \bar{n} z \cdot \delta \eta_{\bar{z}}$$
$$- \iiint d\tau \frac{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial 2l}}{\partial z} \delta \eta.$$

Im Ganzen kommt also durch die Unstetigkeitsfläche zu dem definitiven Ausdruck $\delta \Phi$ in Gleichung (34) folgendes Integral über diese Fläche hinzu:

$$+\iint \overline{ds} \left\{ \begin{array}{l} \left[-\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial a}} \cos \bar{n} x - \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial 2n}} \cos \bar{n} y - \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial 2m}} \cos \bar{n} z \right] \delta \xi \\ + \left[-\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial 2n}} \cos \bar{n} x - \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial b}} \cos \bar{n} y - \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial 2l}} \cos \bar{n} z \right] \delta \eta \\ + \left[-\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial 2m}} \cos \bar{n} x - \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial 2l}} \cos \bar{n} y - \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial c}} \cos \bar{n} z \right] \delta \zeta \end{array} \right\} \qquad (\overline{34})$$

Die virtuellen Verrückungen bedeuten dabei selbstverständlich solche der Sprungfläche an der Stelle $\overline{ds}$.

Dieser neue Zuwachs der potentiellen Energie mufs herstammen von einer Arbeitsleistung äufserer Kräfte, welche die Unstetigkeits-fläche angreifen und deren Intensität proportional dem angegriffenen Flächenelemente $\overline{ds}$ zu setzen ist. Die Unstetigkeitsfläche liegt aber im Inneren des Bereiches, könnte also durch äufsere Kräfte nur aus der

Ferne her angegriffen werden, Fernkräfte wirken aber nur auf träge Massen und der Ausweg einer Flächenbelegung mit endlicher Masse wurde schon mehrmals von uns zurückgewiesen. Man kann also keine äufseren Kräfte an der Unstetigkeitsfläche annehmen, folglich auch keine Arbeit bei der virtuellen Verrückung; das hinzugekommene Integral mufs also nothwendig verschwinden, was bei der Willkürlichkeit der $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ nur dann zutreffen kann, wenn an jeder Stelle der Fläche jede der drei eckigen Klammern einzeln gleich Null ist. Denkt man an die Bedeutung der Zeichen $\overline{\underline{\frac{\partial\varphi}{\partial a}}}$ als Differenzen, so kann man den ganzen Inhalt jeder der eckigen Klammern als eine Differenz hinstellen, die ein gewisser Ausdruck an beiden Seiten der Sprungstelle zeigt. Die Nullsetzung der ersten Klammer kann man dann so schreiben:

$$\overline{\underline{\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)\cos\bar{n}x + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial 2n}\right)\cos\bar{n}y + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial 2m}\right)\cos\bar{n}z}} = 0.$$

Analog die beiden anderen. Der Ausdruck, der vorstehend für beide Seiten der Sprungfläche gebildet werden soll, ist nun nichts anderes als $X_{\bar n}$ (vergl. 36 a). Die beiden anderen Ausdrücke, welche der zweiten und dritten Klammer entstammen, sind $Y_{\bar n}$ und $Z_{\bar n}$. Wir erhalten also die Bedingung, dafs die Componenten der inneren Flächenkräfte auf die Unstetigkeitsfläche keinen Sprung erleiden dürfen, sondern denselben Werth ergeben, gleichgültig, ob man für die $(-\partial\varphi/\partial a)$ etc. die Werthe an der einen oder an der anderen Seite einsetzt. Man kann die Bedingung folgendermafsen veranschaulichen: Denken wir ein Flächenelement ds im Inneren des Bereiches von Ort zu Ort geführt, so kann man verfolgen, wie sich die Flächenkraft $X_n\, Y_n\, Z_n$ auf dieses ds dabei verändert. Man wird überall Stetigkeit finden; aufser wenn man das Flächenelement durch die Sprungfläche führt; dort erfolgt die Veränderung im Allgemeinen sprungweise, doch bleibt auch hier die Stetigkeit gewahrt in dem einen besonderen Falle, dafs nämlich ds in solcher Lage durch die Sprungfläche tritt, dafs es sich dabei mit der Fläche deckt, dafs also ihre Normale n dort zusammenfällt mit $\bar{n}$. Noch eine andere Deutung kann man der Bedingung geben. Statt $\overline{\underline{X_{\bar n}}} = 0$ zu setzen, wo links eine Differenz steht, kann man statt deren auch eine Summe schreiben, wenn man im Subtrahendus die Richtung der Normale auf der Unstetigkeitsfläche entgegengesetzt wählt, dann erhält man $X_{\bar n} + X_{-\bar n} = 0$, analog $Y_{\bar n} + Y_{-\bar n} = Z_{\bar n} + Z_{-\bar n} = 0$. Dabei bedeuten $X_{\bar{n}}\, Y_{\bar{n}}\, Z_{\bar{n}}$ die Flächenkräfte, welche der Bereich auf der Seite $\bar{n}$ seitens des anderen erfährt, und $X_{-\bar{n}}\, Y_{-\bar{n}}\, Z_{-\bar{n}}$ sind die, welche der Bereich auf der Seite $(-\bar{n})$ durch den festen Zusammenhang mit dem heterogenen Bereich jenseits der Sprungfläche erfährt. Diese beiden Kräfte müssen sich also das Gleichgewicht halten, ganz ebenso wie an irgend einer nur gedachten Schnittfläche im Inneren homogener Substanz. In dieser Form ausgesprochen erscheint die Bedingung am anschaulichsten, denn wenn an einer Fläche äufsere Kräfte von fern her nicht angreifen können, so müssen bei Erhaltung der Ruhe die von beiden Seiten dort angreifenden, von der Deformation der beiden benachbarten Substanzen herrührenden Flächenkräfte sich gegenseitig zerstören. Hinzugefügt mag noch die Bemerkung werden, dafs überhaupt das einzige experimentell mögliche Mittel, um auf die freie Oberfläche eines Körpers Flächenkräfte von aufsen wirken zu lassen, darin besteht, dafs man diese Oberfläche in feste, innige Berührung mit anderen elastischen Hülfskörpern bringt, in denen man die zur Erzeugung der gewünschten Oberflächenkräfte geeigneten Deformationen hervorbringen mufs.

Der Unstetigkeit der 9 Gröfsen $X_x \ldots$ werden durch diese Bedingungen für jede Stelle der Sprungfläche drei Beziehungen auferlegt, es können daher nicht alle 9 Sprünge beliebig sein, sondern durch 3 derselben sind die übrigen bestimmt. Um ein Beispiel mit den aller einfachsten Bezeichnungen zu geben, wollen wir eine Stelle betrachten, wo die Grenzfläche zweier heterogener deformirter elastischer Medien eine Ebene senkrecht zur x-Axe bildet, dann fordert unsere Bedingung, dafs die Flächenkräfte X_x, Y_x, Z_x stetig bleiben müssen. Wegen der Gleichungen (38_7) müssen dann auch X_y und X_z stetig bleiben, nur Y_y, Z_z urd $Y_z = Z_y$ können in beiden Medien verschieden sein. Veranschaulicht man sich die Wirkung dieser Flächenkräfte, so ist diese theoretische Forderung auch ganz einleuchtend. Ein positives X_x ist eine normale Druckkraft auf die Berührungsfläche, diese mufs von beiden Seiten her gleich stark sein, damit die Grenze nicht in der einen oder der anderen Richtung vor- oder zurückgedrängt werde. Bei negativem Werthe von X_x ist es eine Zugkraft, für welche genau das Gleiche gilt, so lange der Zusammenhang der beiden heterogenen Medien nicht durch Zerreifsen aufgehoben wird. Bis zu dieser physikalisch möglichen und praktisch häufigen Lösung der Gleichgewichtsfrage können wir indessen unsere Theorie nicht ausdehnen. Ein positives Y_x bedeutet eine Schubkraft, welche den Bereich rechts in positiver y-Richtung, den Bereich links in negativer y-Richtung schieben will. Wegen des festhaftenden Zusammenhanges ist aber ein Gleiten längs der Grenzfläche ausgeschlossen, der eine Bereich müfste vielmehr den anderen mitnehmen, und die Ruhe verlangt, dafs beide Schubkräfte entgegengesetzt gleich, mithin Y_x stetig ist. Das Gleiche gilt von Z_x. Die Stetigkeit der Schubkräfte X_y und X_z an der Grenze ist nothwendig, damit kein resultirendes Drehungsmoment das Gleichgewicht störe. Dagegen können die normalen Druckkräfte Y_y und Z_z und die Schubkräfte $Y_z = Z_y$ auf beiden Seiten durchaus verschieden sein, ohne das Gleichgewicht zu stören, man mufs nur annehmen, dafs diese Kräfte bereits angebracht wurden und die ihnen entsprechenden Deformationen in jedem der heterogenen Körper erzeugt haben, ehe die innige Berührung längs der auf x senkrechten Ebene hergestellt wurde.

§ 27. Gestalt der Function φ.

Alle vorangehenden Untersuchungen über die elastischen Kräfte gründeten sich im Wesentlichen auf die Existenz der Function φ, deren Raumintegral Φ die potentielle Energie der elastischen Deformation des Bereiches darstellt. Besondere Annahmen über die Gestalt dieser Function waren bisher nicht nöthig geworden; es genügte die Eigenschaft, dafs sie in differenzirbarer Weise von den 6 Strain-Variabelen a, b, c, l, m, n abhängt. Jetzt wollen wir nun die analytische Form dieser Abhängigkeit aufsuchen und zwar hauptsächlich für den festen Aggregatzustand. Feste Körper besitzen ohne Einwirkung fremder Kräfte eine natürliche Gestalt, welche dem stabilen Gleichgewicht der inneren Kräfte entspringt und daher ein absolutes Minimum der elastischen Energie Φ zeigt. Wir wollen nun die Annahme hinzufügen, dafs jedes beliebige Stück des betrachteten festen Körpers für sich allein eben dieselbe natürliche Gestalt besitzt, welche es auch in der natürlichen Gestalt des ganzen Systems einnimmt. Dann mufs auch die potentielle Energie jedes einzelnen Theilchens, also $\varphi \cdot d\tau$, mithin die Function φ selbst ein Minimum in der natürlichen Gestalt sein. (Man kann Systeme fester Körper herstellen, deren einzelne Theile in der Ruhelage des Ganzen grofsen Spannungen ausgesetzt sind und dementsprechend auch nicht in ihrer natürlichen Gestalt aber trotzdem ruhend fortbestehen, z. B. eine gespannte Armbrust oder eine eiserne Bombe, gefüllt mit Wasser, welche man zum Gefrieren abgekühlt hat etc. Bei solchen Systemen ist für die Ruhelage zwar Φ ein Minimum, aber φ nicht.

Solche Fälle wollen wir also zunächst ausschliefsen und nur von festen Körpern ohne innere Spannungen handeln.)

Die Deformationen messen wir von der natürlichen Gestalt als Anfangszustand aus, das Minimum von φ tritt dann ein, wenn alle 6 Variabelen gleich Null sind; die Gröfse des Minimalwerthes können wir wegen der unbestimmten additiven Constante, mit welcher die potentielle Energie immer behaftet ist, gleich Null setzen. Dadurch haben wir alle Angaben beisammen, die zu einer expliciten Darstellung von φ nöthig sind, denn wegen des regulären Verlaufes der Function kann man eine Reihenentwickelung vornehmen, welche nach Potenzen und Producten der Variabelen fortschreitet. Das constante Glied, mit welchem die Reihe anhebt, haben wir soeben willkürlich gleich Null gesetzt, die 6 linearen Glieder, welche dann folgen, müssen einzeln verschwinden, weil φ in der Ruhelage ein Minimum sein soll; also erst die Glieder zweiten Grades treten auf. Nach diesen aber kann man die Reihe abbrechen, da alle höheren Grade bei der Kleinheit der Deformationsdaten, auf welche unsere ganze Theorie gegründet ist, gegen den niedrigsten verschwinden. Mithin stellt sich φ als homogene Function zweiten Grades der 6 Variabelen $a\,b\,c\,l\,m\,n$ dar. Eine solche Function besteht aus $\frac{6 \times 7}{2} = 21$ Gliedern, 6 quadratischen und 15, welche Doppelproducte je zweier verschiedener Variabelen enthalten. Die Coefficienten wollen wir der Uebersichtlichkeit halber durch den Buchstaben C mit angehängten Indices ausdrücken, dann lautet die Entwickelung:

$$\left.\begin{aligned}\varphi = C_{aa}a^2 + 2\,C_{ab}\,a\,b + 2\,C_{ac}\,a\,c + 2\,C_{al}\,a\,l + 2\,C_{am}\,a\,m + 2\,C_{an}\,a\,n \\ + C_{bb}\,b^2 + 2\,C_{bc}\,b\,c + 2\,C_{bl}\,b\,l + 2\,C_{bm}\,b\,m + 2\,C_{bn}\,bn \\ + C_{cc}\,c^2 + 2\,C_{cl}\,c\,l + 2\,C_{cm}\,c\,m + 2\,C_{cn}\,c\,n \\ + C_{ll}\,l^2 + 2\,C_{lm}\,l\,m + 2\,C_{ln}\,l\,n \\ + C_{mm}\,m^2 + 2\,C_{mn}\,mn \\ + C_{nn}\,n^2\,.\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Zur Charakteristik des elastischen Verhaltens einer festen Substanz in der Umgebung ihrer natürlichen Gestalt gehören also im allgemeinsten Falle 21 Gröfsen, welche man die Elasticitäts-Coefficienten nennt. Diese müssen von der Art der Deformation unabhängig sein, sie sind nur bedingt durch die Structur des Körpers und freilich auch durch dessen Richtung gegen die Coordinataxen, auf welche sich die $a\,b\,c\,l\,m\,n$ beziehen. Soweit die Structur homogen ist, also im ganzen Inneren eines einheitlichen Krystalles oder einer regelmäfsig gewachsenen Holzart, sind diese Coefficienten constant, in anderen Fällen können sie stetig von Ort zu Ort ihre Werthe ändern, an der Grenze heterogener Substanzen werden sie unstetig.

Die Stabilität des Gleichgewichtes findet in Gleichung (43) noch nicht ihren Ausdruck. Dieser verlangt, dafs die Function φ für alle möglichen Werthgruppen der Variabelen positiv ist, nur dann ist φ in der Ruhelage absolutes Minimum, in jedem anderen Falle, wo negative Werthe von φ möglich sind, hat man einen Sattelwerth oder ein Maximum, jedenfalls also labiles Gleichgewicht der Substanz, welches bei der geringsten Deformation völlig zerstört werden würde. Die Bedingungen, welche dadurch zwischen die 21 Coefficienten gebracht werden, würden sich wohl dadurch finden lassen, dafs man die Function durch lineare Substitutionen in eine Summe von Quadraten verwandelt und dann fordert, dafs die Coefficienten aller Quadrate $\geqq 0$ sein müssen. Wir wollen indessen hierauf bei dieser allgemeinen Betrachtung nicht eingehen: In den uns später beschäftigenden einfacheren Verhältnissen für isotrope Structuren, bei denen die Zahl der Elasticitäts-Coefficienten auf zwei beschränkt ist, wird man die Bedingungen der Stabilität sehr leicht erkennen.

Jetzt sollen noch die Verhältnisse betrachtet werden, in denen die Gestalt der Function φ in Gleichung (43) nicht zutrifft. Wir hatten dabei nämlich vorausgesagt, dafs die Substanz in ihrer natürlichen Gestalt keine inneren Spannungen aufweist. Sobald diese Bedingung nicht erfüllt ist, werden auch lineare Glieder:

$$C_a a + C_b b + C_c c + C_l l + C_m m + C_n n$$

hinzutreten, deren Coefficienten nicht nur durch die Structur, sondern auch durch die Art dieser Spannungen bedingt sind. Die Deformationszahlen a bis n, welche von der Ruhelage des ganzen Systems aus gemessen sind, stellen dann nicht den ganzen Strain dar, sondern nur den hinzukommenden Theil. Kennt man aber den beim Gleichgewicht des Systems an den einzelnen Stellen bereits herrschenden Strain, dessen Daten durch a_0, b_0, c_0, l_0, m_0, n_0 bezeichnet seien, so kann man mit Hülfe der Gleichung (43) diese Coefficienten der linearen Glieder finden; man braucht nämlich dort an Stelle der Variabelen nur die totalen Werthe der Straindaten einzuführen, welche sich wegen der ungestörten Superposition kleiner Verrückungen als die Summen $a_0 + a$, $b_0 + b, \ldots, n_0 + n$ angeben lassen. Wir wollen auf diese Weise nur als Beispiel den Coefficienten C_a ermitteln, und bilden zu diesem Zwecke alle Glieder des Ausdruckes (43), welche dort a enthalten, also dessen erste Zeile. Sie lautet nun:

$$C_{aa}(a_0 + a)^2 + 2\,C_{ab}(a_0 + a)(b_0 + b) + \ldots + 2\,C_{an}(a_0 + a)(n_0 + n).$$

Führt man die Multiplicationen aus, so erhält man zunächst 6 Glieder

$$C_{aa}\,a_0{}^2 + 2\,C_{ab}\,a_0\,b_0 + \ldots + 2\,C_{an}\,a_0\,n_0\,.$$

Diese liefern einen Theil des Werthes von φ in der Anfangslage, wenn φ im spannungslosen Zustand gleich Null gesetzt wird. Setzt man aber φ für den Ruhezustand des ganzen Systems willkürlich gleich Null, so sind diese Glieder zu der additiven Constante zu werfen, wo sie vernichtet werden. Dann folgen 6 Glieder, welche nur die erste Potenz von a führen; diese liefern

$$2 \cdot \left\{C_{aa}\,a_0 + C_{ab}\cdot b_0 + \ldots + C_{an}\,n_0\right\} \cdot a. \qquad (44)$$

Der in geschweifte Klammer gesetzte Ausdruck ist der gesuchte Coefficient C_a des ersten linearen Gliedes. Man sieht, dafs dieser nicht allein durch die Elasticitätscoefficienten, sondern auch durch den Strain in der Ruhelage des Ganzen bedingt ist. Die dann noch folgenden Glieder

$$2\,C_{ab}\cdot a_0\,b + 2\,C_{ac}\,a_0\,c + \ldots + 2\,C_{an}\,a_0\,n$$

bilden Theile der linearen Coefficienten C_b, $C_c \ldots C_n$, welche wir ebenso finden können, wie C_a. Schliefslich kommen dann noch 6 Glieder zweiten Grades:

$$C_{aa}\,a^2 + 2\,C_{ab}\,a\,b + 2\,C_{ac}\,a\,c + \ldots + 2\,C_{an}\,a\,n,$$

welche formal identisch sind mit denen, die auch die Gleichung (43) führt. Ob man letztere gegen die linearen Glieder vernachlässigen darf, ist im einzelnen Falle zu prüfen. Erlaubt wird dies sein, wenn die hinzutretende Deformation $a\,b\,c\,l\,m\,n$ klein ist gegen die in der natürlichen Ruhelage bereits herrschende Deformation $a_0\,b_0\,c_0\,l_0\,m_0\,n_0$.

§ 28. Die Function φ für Flüssigkeiten.

Die Function φ hat nicht nur für den festen, sondern auch für die beiden flüssigen Aggregatzustände Bedeutung, nimmt dann aber aufserordentlich viel einfachere Gestalten an. Die tropfbaren Flüssigkeiten leisten keinen elastischen Widerstand gegen Verschiebungen der Schichten, sie besitzen, wenn man von Capillarkräften absieht, keine natürliche Form, wohl aber ein natürliches Volumen, gegen dessen Veränderung sie nicht viel schwächer reagiren, als die festen Körper, weshalb man sie auch, mäſsigen äuſseren Kräften gegenüber, häufig als incompressibel betrachten darf. Die positive oder negative Volumdilatation bei irgend einer Deformation ist nun nach Gleichung (18c) auf Seite 39 bestimmt durch:

$$\omega = a + b + c,$$

diese Summe der ersten drei Deformationsdaten muſs also die einzige in φ vorkommende Variabele sein, l, m, n dürfen überhaupt nicht eingehen. Man erkennt leicht, daſs die allgemeine Form (43) diese Bedingung nur erfüllt, wenn alle die 15 Coefficienten, welche l, m, n führen, einzeln verschwinden, während die sechs übrigen, welche nur a, b, c führen, einen gemeinsamen Werth haben, den wir in Uebereinstimmung mit einer später benutzten Bezeichnung $\frac{1}{2}H$ schreiben. Dann nimmt φ die Gestalt an:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}H \cdot \left\{\begin{array}{l} a^2 + 2ab + 2ac \\ \qquad + b^2 + 2bc \\ \qquad\qquad + c^2 \end{array}\right\} = \tfrac{1}{2}H \cdot (a + b + c)^2 = \tfrac{1}{2}H \cdot \omega^2. \tag{45}$$

Ist der Anfangszustand, von welchem aus die Volumveränderungen der Flüssigkeiten gemessen werden, nicht der natürliche, sondern besitzt er ein durch Druck oder Zugkräfte bereits verändertes Volumen, so wird zu φ wieder noch ein lineares Glied $C_\omega \cdot \omega$ treten, dessen Coefficienten man berechnen kann, wenn man die Dilatation ω_0 des erzwungenen Anfangsvolumens gegenüber dem natürlichen Volumen kennt. Es ist dann, wie vorher,

$$\varphi = \tfrac{1}{2}H \cdot (\omega_0 + \omega)^2 = \tfrac{1}{2}H\omega_0^2 + H \cdot \omega_0 \cdot \omega + \tfrac{1}{2}H\omega^2$$

zu setzen. Das Glied $\frac{1}{2}H\omega_0^2$ kann durch den willkürlichen Addendus zum Verschwinden gebracht werden, das lineare Glied besitzt den Coefficienten

$$C_\omega = H \cdot \omega_0. \tag{45a}$$

Der Elasticitätscoefficient H muſs nothwendig positiv sein, denn φ in Gleichung (45) muſs wegen der Stabilität des natürlichen Gleichgewichtes den Minimalwerth Null besitzen, also stets positiv sein. Der lineare Coefficient C_ω dagegen wird in den meisten praktisch möglichen Fällen negativ, weil ω_0 negativ ist, wenn die Flüssigkeit unter (positivem) Druck steht. Flüssigkeiten unter negativen Druck zu bringen, wobei sie über ihr natürliches Volumen gedehnt werden müssen, gelingt gewöhnlich nicht, denn sobald man den Druck unter einen gewissen, in allen Fällen noch positiven Betrag herabgesetzt hat, bildet sich eine dampfförmige Phase neben der flüssigen und es gelingt dann niemals, den Druck weiter zu vermindern oder gar ihn in negativen Druck übergehen zu lassen. Diese sogenannte „Dampfspannung“, welche für jede Flüssigkeit ihre eigenen Werthe hat und mit steigender Temperatur in bestimmter Weise zunimmt, ist also gemeinhin der geringste Druck, unter den man eine Flüssigkeit versetzen kann. Für Wasser beträgt er bei Zimmertemperatur nur etwa den fünfzigsten Theil des gewöhnlichen Atmosphärendruckes, für concentrirte Schwefelsäure und für Quecksilber ist er so aufserordentlich klein, dafs man ihn selbst bei recht empfindlichen Messungen direct gleich Null setzen und dementsprechend die gasförmige Phase als absolut leer von Dampf, als vollkommenes Vacuum betrachten darf. In der Toricelli'schen Barometerröhre sieht man ein solches Vacuum.

Nun ist zu bemerken, dafs dem Entstehen der ersten Spur der gasförmigen Phase ein gewisser Widerstand begegnet, indem die Cohäsion der Flüssigkeit an einer Stelle zerrissen werden mufs; auch läfst sich denken, dafs in dem ersten sehr kleinen Dampfbläschen wegen der Capillarspannung der sehr stark gekrümmten flüssigen Umhüllung ein höherer Druck als in den übrigen Theilen herrschen mufs, was ebenfalls den Beginn der Dampfbildung erschwert oder gar verhindert. Durch kleine Beimengungen leicht vergasbarer Stoffe, namentlich der gewöhnlich stets vorhandenen eingeschlossenen Luft, wird die Trennung wesentlich erleichtert oder überhaupt erst ermöglicht. Sorgt man aber peinlich für luftfreie Flüssigkeiten nnd Gefäfse, so kann man thatsächlich das Entstehen der Dampfphase resp. des Vacuums verhindern und Flüssigkeiten unter noch niedrigere, ja sogar negative Drucke stellen. Ein derartiges Experiment läfst sich mit Quecksilber anstellen in einer etwa 1 Meter langen, am offenen Ende durch einen Hahn verschliefsbaren Barometerröhre. Füllt man diese, stellt sie auf und öffnet den Hahn unter Quecksilber in einer Wanne, so bildet sich das bekannte Toricelli'sche Vacuum. Schliefst man dann den Hahn, so kann man die Röhre in beliebige Lagen bringen und so mit diesem Vacuum das Quecksilber und die Glaswandungen gewissermafsen ausspülen; die überall vertheilten Luftspuren lösen sich dabei in dem Vacuum auf. Oeffnet man dann wieder unter Quecksilber den Hahn und neigt die Röhre, so verschwindet das Vacuum bis auf eine kleine Blase, welche die ausgewaschene Luft enthält. Diese kann man durch den Hahn hindurch austreten lassen und die beschriebene Reihe von Hantirungen mehrmals wiederholen. Das Vacuum wird immer vollkommener, die übrig bleibende Luftblase immer kleiner, schliefslich kann man durch mäfsiges Erwärmen der Röhre die Austreibung der letzten Luftspuren noch unterstützen. Der allerletzte Rest wird wohl von der Flüssigkeit absorbirt und sehr fest gehalten, so dafs schliefslich an keiner Stelle der Zusammenhang zwischen dem Quecksilber in sich und mit der Glaswand unterbrochen ist. Macht man dann den Toricelli'schen Versuch noch einmal, so bildet sich kein Vacuum mehr. Da die Röhre 1 Meter hoch ist, während der äufsere Luftdruck sie nur bis zu einer Höhe von etwa 76 cm tragen kann, so folgt, dafs das oberste Viertel des Quecksilbers nun unter einem Drucke unter Null, also unter einem Zuge steht. Man kann sogar noch den äufseren Druck von dem offenen Ende der Röhre durch eine Luftpumpe wegnehmen, ohne dafs die Quecksilberkuppe vom Glase losreifst oder im Inneren die Trennung beginnt, obwohl nun ein negativer Druck von mehr als einer Atmosphäre dort herrscht. Dieser Versuch lehrt also, dafs auch eine Flüssigkeit Zugkräften widerstehen kann, so dafs in dieser Hinsicht kein principieller Unterschied zwischen ihr und den festen Körpern besteht. Nur sind die Bedingungen so schwer herzustellen, dafs man diese Eigenschaft, die Cohäsion, nur in Ausnahmefällen beobachten kann.

Bei den gasförmigen Körpern endlich ist es überhaupt nicht möglich, φ von einem natürlichen Volumen als Anfangszustand aus zu messen, denn Gase zerstreuen sich, ohne Wirkung zusammenhaltender Kräfte, durch den ganzen Raum ohne Grenze und können nur durch positiven Druck auf einem bestimmten Volumen in Ruhe gehalten werden. Dies gilt wenigstens für irdische Verhältnisse. Bei kosmischen Gasmassen bildet die Gravitation die zusammenhaltende Kraft, doch erzeugen auch dort die peripheren Schichten einen lastenden Druck auf die inneren. Ein Minimum von φ kann also bei Gasen nicht erreicht werden, die potentielle Energie sinkt mit zunehmender Verdünnung immer weiter. Hat man einen bestimmten Anfangszustand unter einem gewissen Drucke festgesetzt und bestimmt willkürlich für diesen $\varphi = 0$, so ist für kleine Deformationen nur das lineare Glied

$$\varphi = C_\omega \cdot (a + b + c) = C_\omega \cdot \omega \tag{46}$$

mafsgebend. Der Coefficient C_ω, welcher nothwendig negativ sein mufs, da φ bei Compression steigt, ist an absolutem Werthe nichts anderes, als der Druck, unter dem das Gas gehalten wird. Am einfachsten sieht man dies ein, wenn man die Gleichungen (39) heranzieht. Der Druck p ist nämlich der gemeinsame Werth, welchen bei einem reinen Volumstrain die Flächenkräfte X_x, Y_y, Z_z annehmen, also $p = -\frac{\partial \varphi}{\partial a}$ oder $= -\frac{\partial \varphi}{\partial b}$ oder $= -\frac{\partial \varphi}{\partial c}$.

Nach Gleichung (46) also

$$p = -\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = -C_\omega. \tag{46a}$$

Dasselbe würde man finden, wenn man bedenkt, dafs Φ gleich der Arbeit sein mufs, welche bei einer kleinen Volumveränderung der unter dem Drucke p stehenden Gasmasse geleistet werden mufs. Beträgt nämlich das Volumen des Gases V, so ist: $\Phi = \int\int\int \varphi \, d\tau = \varphi \cdot V$. Verändert man das Volumen um den Betrag δV, so kostet das von aufsen die Arbeit $p \cdot (-\delta V)$, positiv bei Compression, negativ bei Dehnung, das Energieprincip verlangt also

$$\varphi \cdot V = p \cdot (-\delta V)$$

oder

$$\varphi = -p \cdot \frac{\delta V}{V}.$$

Der Quotient $\delta V / V$ ist nun unser ω (vergl. S. 38, Gleichung (18), also mufs $C_\omega = -p$ sein.

Uebrigens wollen wir die Elasticität der Gase hier nicht näher verfolgen; es ist das ein Capitel, welches nur unter Berücksichtigung der Wärmeerscheinungen behandelt werden kann.

§ 29. Vereinfachung von φ für feste Körper beim Auftreten von Structur-Symmetrien.

Wir wenden uns nun wieder zurück zum festen Aggregatzustande und zwar zu homogenen Körpern, welche eine spannunglose natürliche Gestalt besitzen, also zu dem ursprünglichen Ausdruck φ in Gleichung (43) mit 21 Elasticitätscoefficienten. Wir wollen jetzt annehmen, dafs die Structur gewisse Regelmäfsigkeiten besitzt, welche sich darin äufsern, dafs der Körper in verschiedenen Richtungen gleiche Eigenschaften besitzt. Die bescheidenste Forderung, die wir in dieser Absicht an die Structur stellen können, ist Symmetrie zu beiden Seiten einer bestimmten Ebene, woraus folgt, daſs der Körper in den beiden entgegengesetzten Richtungen normal zu dieser Ebene gleiches elastisches Verhalten zeigt. Was hiermit im Besonderen gemeint ist, wird gleich deutlicher werden. Wir wollen diese Symmetrie nicht für den allgemeinen Fall einer willkürlichen Richtung betrachten, sondern wollen sogleich noch die zweite Vereinfachung hinzunehmen, daſs das Coordinatensystem so gelegt sei, daſs eine seiner Grundebenen, beispielsweise die (y, z)-Ebene, die Symmetrieebene angiebt. Denken wir einem Bereich im Inneren des Körpers eine beliebige Deformation ertheilt, so müssen zu dem Zwecke im Allgemeinen bestimmte äuſsere Kräfte angestrengt werden, deren Beschleunigungscomponenten wir schon früher mit X, Y, Z bezeichneten, und deren Beträge durch die Gleichungen (40) (Seite 77) oder die damit gleichbedeutenden Gleichungen (36) angegeben werden. Denken wir ein zweites Mal dem Bereich eine andere Deformation ertheilt, welche sich von der ersteren nur dadurch unterscheidet, daſs alle Abmessungen und Verrückungscomponenten senkrecht zur (y, z)-Ebene entgegengesetzte Richtung haben, während in tangentialer Richtung alles ungeändert bleibt. Diese zweite Deformation gleicht also dem Spiegelbilde der ersten (Spiegel ist die (y, z)-Ebene). Die Forderung der Structur-Symmetrie ist nun die, daſs die äuſseren Kräfte, welche diese zweite Deformation aufrecht halten, in der x-Richtung entgegengesetzt gleiche, in den tangentialen Richtungen aber unverändert die gleichen Componenten aufweisen müssen. (Man könnte die Forderung ebenso gut umgekehrt ausdrücken: Wenn man die X-Componente der äuſseren Kraft umdreht, so soll die Deformation dadurch in ihr Spiegelbild übergehen; wir wollen aber bei der ersteren Fassung stehen bleiben.)

Um die mathematischen Folgerungen dieser Annahme zu finden, haben wir in den Ausdrücken für die Kraftcomponenten alle Abmessungen in der x-Richtung, das sind die Differentiale $\partial \xi$ und ∂x, im Vorzeichen umzudrehen. Wie verändern sich dabei zunächst die 6 Deformationsdaten? Die erste Variabele $a = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ bleibt ungeändert, da Zähler und Nenner gleichmäſsig das Vorzeichen wechseln, die zweite bis vierte:

$$b = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad 2l = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

bleiben ebenfalls ungeändert, weil in ihnen überhaupt keine x-Abmessungen vorkommen, dagegen werden die beiden letzten

$$2m = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad \text{und} \quad 2n = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

in den entgegengesetzten Werth verwandelt, weil die beiden Summanden, aus denen sie bestehen, nur im Zähler $\partial \xi$ oder nur im Nenner ∂x führen.

Wir bilden zunächst aus dem Werthe von φ in Gleichung (43) dessen negative Differentialquotienten nach den 6 Variabeln:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial \varphi}{\partial a} &\equiv X_x &&= -2\{C_{aa}a + C_{ab}b + C_{ac}c + C_{al}l + C_{am}m + C_{an}n\} \\
-\frac{\partial \varphi}{\partial b} &\equiv Y_y &&= -2\{C_{ab}a + C_{bb}b + C_{bc}c + C_{bl}l + C_{bm}m + C_{bn}n\} \\
-\frac{\partial \varphi}{\partial c} &\equiv Z_z &&= -2\{C_{ac}a + C_{bc}b + C_{cc}c + C_{cl}l + C_{cm}m + C_{cn}n\} \\
-\frac{\partial \varphi}{\partial 2l} &\equiv Y_z \equiv Z_y &&= -\ \{C_{al}a + C_{bl}b + C_{cl}c + C_{ll}l + C_{lm}m + C_{ln}n\} \\
-\frac{\partial \varphi}{\partial 2m} &\equiv Z_x \equiv X_z &&= -\ \{C_{am}a + C_{bm}b + C_{cm}c + C_{lm}l + C_{mm}m + C_{mn}n\} \\
-\frac{\partial \varphi}{\partial 2n} &\equiv X_y \equiv Y_x &&= -\ \{C_{an}a + C_{bn}b + C_{cn}c + C_{ln}l + C_{mn}m + C_{nn}n\}
\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Aus diesen Angaben sind die äufseren Kräfte herzuleiten mittels der Gleichungen (40), welche der bequemeren Uebersicht wegen hier wiederholt werden:

$$\left.\begin{aligned}
\mu X &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
\mu Y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\
\mu Z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Wenn wir nun den Zeichenwechsel vornehmen wollen, so müssen wir erstens auf den rechten Seiten der 6 Gleichungen (47) die beiden letzten Glieder, welche die Factoren m oder n enthalten, ins Negative umkehren, zweitens aber müssen wir in den 3 Gleichungen (40) die ersten Glieder rechts, wegen der im Nenner stehenden ∂x, umkehren, wodurch in den Zählern X_x, Y_x, Z_x die von m und n herrührenden Zeichenwechsel wieder aufgehoben werden. Geht man nun nach diesen Angaben sämmtliche Glieder durch, so findet man

Regeln, die sich am übersichtlichsten in folgender Tabelle zusammenstellen lassen:

	Es bleiben unverändert die Glieder mit den Coefficienten	Es wechseln das Vorzeichen die Glieder mit den Coefficienten
In μX	$C_{am}\ C_{an}$ $C_{an}\ C_{bn}\ C_{cn}\ C_{ln}$ $C_{am}\ C_{bm}\ C_{cm}\ C_{lm}$	$C_{aa}\ C_{ab}\ C_{ac}\ C_{al}$ $C_{mn}\ C_{nn}$ $C_{mm}\ C_{mn}$
In μY	$C_{mn}\ C_{nn}$ $C_{ab}\ C_{bb}\ C_{bc}\ C_{bl}$ $C_{al}\ C_{bl}\ C_{cl}\ C_{ll}$	$C_{an}\ C_{bn}\ C_{cn}\ C_{ln}$ $C_{bm}\ C_{bn}$ $C_{lm}\ C_{ln}$
In μZ	$C_{mm}\ C_{mn}$ $C_{al}\ C_{bl}\ C_{cl}\ C_{ll}$ $C_{ac}\ C_{bc}\ C_{cc}\ C_{cl}$	$C_{am}\ C_{bm}\ C_{cm}\ C_{lm}$ $C_{lm}\ C_{ln}$ $C_{cm}\ C_{cn}$

Die Coefficienten sind in den einzelnen Fächern zeilenweise in der Reihenfolge aufgeführt, wie man sie findet, wenn man zunächst die Anordnung der Glieder rechts in den 3 Gleichungen (40) befolgt, ferner sind sie colonnenweise so geordnet, wie sie rechts in den 6 Gleichungen (47) vorkommen. Man findet deshalb in allen Fächern einige Coefficienten doppelt angeführt, was ohne weitere Bedeutung ist.

Nun stellen wir die Forderungen der Symmetrie um die (y, z)-Ebene. Die Kraftcomponente μX soll beim Zeichenwechsel in den entgegengesetzt gleichen Werth übergehen; das ist nur dann möglich, wenn alle Coefficienten in dem obersten linken Fach gleich Null sind; denn diese führen Glieder, welche ihr Zeichen nicht wechseln. Die Componenten μY und μZ dagegen sollen durch den Zeichenwechsel nicht betroffen werden; das ist nur dann möglich, wenn alle Coefficienten im mittelsten und untersten rechten Fach gleich Null sind; denn diese führen Glieder, welche ihr Zeichen umkehren. Diese drei Fächer, deren Inhalt gleich Null gefordert wird, sind in vorstehender Tabelle schwarz umrahmt; vergleicht man deren sich deckenden eingeschlossenen Bestand, so erkennt man, dafs bei Erfüllung dieser Symmetrieforderung 8 von den Coefficienten ausscheiden, nämlich diejenigen, welche als Index entweder m oder n einfach führen. Die durch sie eingeführten Glieder in der Function φ (Gleichung (43)) stehen rechts oben in folgender Anordnung:

$$\begin{array}{cc} C_{am} & C_{an} \\ C_{bm} & C_{bn} \\ C_{cm} & C_{cn} \\ C_{lm} & C_{ln}. \end{array}$$

Dies sind zugleich die Glieder, welche die Variabelen m oder n in erster Potenz führen, ausschliefslich des Productes $m \cdot n$, also alle jene Glieder von φ, welche bei einer gleichzeitigen Umkehr von m und n ihr Zeichen wechseln. Wir erkennen also am Schlusse dieser Betrachtung, dafs wir auf die Kräfte μX, μY, μZ selbst nicht hätten einzugehen brauchen, sondern einfach als Bedingung für Symmetrie um die (y, z)-Ebene hätten fordern dürfen, dafs die Function φ durch Umkehrung der Vorzeichen von m und n nicht in ihrem Werthe verändert wird.

Dies werden wir uns nun zu Nutze machen, wenn wir fordern, dafs jetzt eine andere der Coordinatebenen, nämlich die (z, x)-Ebene Symmetrieebene der Structur sein soll. Wir haben dann die Vorzeichen von $\partial \eta$ und ∂y umzukehren; von den 6 Variabelen gehen dabei nur $2n = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}$ und $2l = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}$ in ihr Gegentheil über, während a, b, c, m unverändert bleiben. Diese Structursymmetrie verlangt also, dafs in φ alle Glieder verschwinden, welche n und l in erster Potenz führen, aufser dem Gliede mit $n \cdot l$, welches unverändert bleibt. Die Coefficienten, welche jetzt gleich Null gesetzt werden müssen, stellen sich entsprechend dem Bilde der Gleichung (43) folgendermafsen:

$$\begin{array}{ccccc} C_{al} & & \cdot & & C_{an} \\ C_{bl} & & \cdot & & C_{bn} \\ C_{cl} & & \cdot & & C_{cn} \\ \cdot & & C_{lm} & & \cdot \\ & & & & C_{mn}. \end{array}$$

Bei jeder der besprochenen beiden Symmetrien verlieren wir 8 Coefficienten. Bestehen aber beide Arten von Symmetrie neben einander, so verschwinden nicht etwa doppelt so viele Coefficienten, denn der Vergleich beider Gruppen zeigt, dafs 4 derselben, C_{an} C_{bn} C_{cn} und C_{lm} durch jede von beiden vernichtet wird. Im Ganzen verschwinden dann also nur 12 Coefficienten.

Nun soll die letzte der Coordinatebenen, die (x, y)-Ebene, als Symmetrieebene vorausgesetzt werden; $\partial \zeta$ und ∂z sind umzukehren, von den 6 Variabelen wechseln l und m ihr Vorzeichen, a, b, c, n bleiben unverändert. Soll dabei φ ungeändert bleiben, so müssen die Glieder mit linearem l und m aufser dem Gliede mit $l \cdot m$ verschwinden, das trifft die 8 Coefficienten:

$$\begin{array}{ccc} C_{al} & C_{am} & \cdot \\ C_{bl} & C_{bm} & \cdot \\ C_{cl} & C_{cm} & \cdot \\ \cdot & \cdot & C_{ln} \\ \cdot & \cdot & C_{mn}. \end{array}$$

Wollen wir nun, um die Structur unseres Körpers immer regelmäfsiger zu gestalten, diese dritte Symmetrie den beiden vorhergehenden noch hinzufügen, so finden wir, dafs alle 8 Coefficienten, die hier zu beseitigen sind, bereits durch die erste oder durch die zweite Symmetrie beseitigt sind, dafs also die hinzutretenden Bedingungen bereits befriedigt sind. Man kann dieses Resultat zusammenfassen in dem Ausspruch: „Wenn eine Structur symmetrisch ist zu zwei auf einander senkrechten Ebenen, so ist sie auch zu der dritten auf beiden senkrechten Ebenen symmetrisch.“

Wenn alle drei Coordinatebenen Symmetrieebenen der Structur sind, vereinfacht sich mithin φ auf folgenden Ausdruck mit 9 Coefficienten:

$$\begin{aligned} \varphi = C_{aa} a^2 &+ 2\, C_{ab}\, a\, b + 2\, C_{ac}\, a\, c \\ &+ C_{bb}\, b^2 + 2\, C_{bc}\, b\, c \\ &\quad + C_{cc}\, c^2 + C_{ll}\, l^2 + C_{mm}\, m^2 + C_{nn}\, n^2. \end{aligned} \tag{48}$$

Diesen Grad von Regelmäfsigkeit erreichen, ohne ihn zu überschreiten, z. B. die Krystalle des rhombischen Systems, wenn man die Coordinataxen mit den drei auf einander senkrechten ungleichen Krystallaxen zur Deckung bringt. Ein recht anschauliches Beispiel solcher Structur ist nahezu auch ein nicht zu umfangreiches Stück Holz aus dem Stamme eines möglichst dicken und dabei regelmäfsig gewachsenen Baumes. Da findet man Structursymmetrie erstens nach beiden entgegengesetzten Faserrichtungen, so dafs also die Ebene, in der man das Holz quer zu durchsägen pflegt, Symmetrieebene ist. Zweitens aber geben die Jahresschichten (regelmäfsiges Wachsthum vorausgesetzt) die Richtung einer darauf senkrechten

Symmetrie. Endlich ist auch die dritte Ebene, welche parallel den Fasern, aber senkrecht zu den Jahreschichten liegt, eine Symmetrieebene. In jeder dieser drei durch Symmetrie bevorzugten Richtungen sind aber die elastischen Eigenschaften des Holzstückes erheblich verschiedene.

Man kann nun in der Vereinfachung der Structur fortfahren, und fordern, zwei der Symmetrien sollen gleichwerthig sein, d. h. der Körper soll nach den vier auf einander senkrechten Richtungen eines Coordinatenkreuzes gleiches Verhalten zeigen. Mathematisch kann man diese Forderung in dem Ausdruck (48) dadurch anbringen, dafs man die Bezeichnung zweier der Axen vertauscht und fordert, dafs sich der Werth von φ dadurch nicht ändere. Als diese Axen wählen wir zuerst die y-Axe und die z-Axe, dann mufs man $\partial\eta$ mit $\partial\zeta$ vertauschen und ∂y mit ∂z. Dadurch geht b in c über und c in b, ferner m in n und n in m. Bei diesem Umtausch bleibt aber φ nur dann ungeändert, wenn

$$C_{ab} = C_{ac}, \quad C_{bb} = C_{cc} \quad \text{und} \quad C_{mm} = C_{nn} \tag{49_x}$$

ist; es werden also hierdurch zwar keine Coefficienten gleich Null gesetzt, aber man verliert durch diese Gleichungen die Verfügung über 3 Coefficienten. Hätten wir die z- und x-Axe ausgewählt, so müfsten wir c mit a vertauschen und n mit l, die Forderung der gleichwerthigen Symmetrie um die Ebenen normal zu z und x würde dann geben:

$$C_{ab} = C_{bc}, \quad C_{aa} = C_{cc} \quad \text{und} \quad C_{ll} = C_{nn}. \tag{49_y}$$

Sollen endlich beide Forderungen nebeneinander erfüllt sein, so verliert man die Verfügung über 6 Coefficienten gemäfs den 3 Doppelgleichungen

$$\left.\begin{aligned} C_{bc} &= C_{ac} = C_{ab} \\ C_{aa} &= C_{bb} = C_{cc} \\ C_{ll} &= C_{mm} = C_{nn}. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

In diesem Falle ist natürlich auch das letzte Paar von Symmetrien, die um die x-Axe und die y-Axe, gleichwerthig, denn die dadurch entstehenden Forderungen

$$C_{ac} = C_{bc}, \quad C_{aa} = C_{bb} \quad \text{und} \quad C_{ll} = C_{mm} \tag{49_z}$$

sind bereits im Vorstehenden mit erfüllt.

Für Substanzen mit drei auf einander senkrechten, gleichwerthigen Structursymmetrien behält man also bei richtiger Lage des Coordinatensystems nur 3 Elasticitätscoefficienten. Nennen wir die gemeinsamen Werthe der in der ersten, zweiten, dritten Zeile der Gleichungen (49) stehenden Coefficienten der Reihe nach B, A, C, so nimmt φ für solche Structuren die folgende Form an:

$$\varphi = A(a^2 + b^2 + c^2) + 2\,B(b\,c + c\,a + a\,b) + C(l^2 + m^2 + n^2). \qquad (50)$$

Beispiele solcher Structuren sind alle Krystalle des regulären Systems, beispielsweise Steinsalz.

Es ließen sich noch manche andere Zusammensetzungen von Symmetrien betrachten, z. B. solche normal zu schiefwinklig gerichteten Axen. Den wichtigsten Fall dieser Art bilden wohl die häufig vorkommenden Krystalle des hexagonalen Systems (Quarz, Kalkspath); diese besitzen eine ausgezeichnete Symmetrieebene normal auf der Längsaxe und drei gleichwerthige Ebenen normal zu drei dagegen senkrechten unter gleichen Winkeln von $\pi/3$ gegen einander geneigten Queraxen. Es läßt sich übrigens durch Berechnung zeigen, daß dabei nicht nur um diese drei besonderen Ebenen, sondern um alle beliebigen durch die x-Axe gelegten Ebenen gleichwerthige Symmetrien bestehen, so daß die 3 Queraxen für das elastische Verhalten keine bevorzugten Richtungen mehr anzeigen, wenn sie auch im Bau der hexagonalen Krystalle deutlich zu erkennen sind. Die Function φ hat für diese die gleiche Gestalt, wie für Körper, deren Structur rund herum um die bevorzugte x-Axe gleichförmig ist, also wie für gezogene Drähte oder ringsherum gleichmäßig gehämmerte runde Stäbe. Aus der Gleichung (48) kann man φ für diese Fälle bilden, wenn man außer den 3 Gleichungen (49_x), welche ja nothwendig erfüllt sein müssen, noch eine vierte

$$2\,C_{b\,c} = 2\,C_{b\,b} - C_{l\,l} \qquad (51)$$

hinzunimmt, wodurch die Zahl der unabhängigen Elasticitätscoefficienten solcher Körper sich auf fünf stellt. Auf den Beweis dieser Behauptung soll hier nicht eingegangen werden. Wir wollen uns vielmehr sogleich dem einfachsten und wichtigsten Structurgefüge zuwenden.

§ 30. Isotrope Körper. Excurs über gewisse Invarianten.

Man nennt eine Substanz isotrop, wenn sie nach allen Richtungen die gleichen Eigenschaften zeigt. Uns interessiren hier die elastischen Eigenschaften; es sei aber gleich hinzugefügt, daß mit der elastischen Isotropie erfahrungsgemäß stets auch verbunden ist eine solche für das optische, elektrische und thermische Verhalten; solche Körper pflanzen das Licht in allen Richtungen gleich schnell fort und leiten den galvanischen und den Wärmestrom in allen Richtungen mit gleicher Fähigkeit. Dieser Erfahrungssatz gilt aber nicht umgekehrt: man könnte z. B. die regulären Krystalle optisch-isotrop nennen, in elastischer Beziehung aber nicht. Gewöhnlich nun bezeichnet man nur solche Körper als isotrop, in welchen überhaupt keine unterschiedenen oder bevorzugten Richtungen zu entdecken sind, namentlich also auch keine geordnete Krystallisation. Die amorphen Körper im spannungslosen Zustande z. B. sorgfältig bereitete Gläser sind isotrop, aber auch ungeordnete wirre Gemenge kleinster krystallinischer Theilchen, wie wir sie in vielen gegossenen Metallen auch in Gesteinarten, z. B. Marmor vor uns sehen, können meist unbedenklich als isotrop gelten.

Für solche Substanzen wollen wir nun die Gestalt der Function φ suchen. Die drei Coordinatebenen müssen, wie sie auch liegen mögen, drei gleichwerthige Symmetrieebenen sein, weil überhaupt nach allen Richtungen gleichwerthige Symmetrie herrschen mufs. Man ist also von vornherein sicher, dafs φ sich der Form einordnen wird, welche wir in Gleichung (50) fanden. Damals war aber die einfache Gestalt mit nur 3 Coefficienten an die Bedingung geknüpft, dafs die Coordinataxen mit den drei Hauptaxen des regulären Krystalles zusammenfielen, während bei anders orientirtem Coordinatensystem ein complicirterer analytischer Ausdruck für φ zu erwarten war, den wir nicht aufgesucht haben. Jetzt wird die weitere Forderung hinzugefügt, dafs der Ausdruck φ von der Richtung der Coordinaten gänzlich unabhängig sein soll, das heifst also, wenn man eine ganz beliebige Drehung des Axensystems ausgeführt denkt, dafs nach der Substitution der neuen Coordinatabmessungen oder vielmehr der auf diese gegründeten neuen Ausdrücke der 6 Deformationsdaten a bis n das analytische Bild der Function und die Werthe der 3 Coefficienten unverändert bleiben.

Solche Zusammenstellungen von Gröfsen, die zwar auf die Abmessungen eines bestimmten Axensystems gegründet, also etwa aus Componenten gerichteter Strecken auch aus deren Differentialquotienten nach den Coordinatrichtungen zusammengesetzt sind, die aber die Eigenschaft haben, ihre Form nicht zu ändern, wenn man das Coordinatensystem dreht, nennt man Invarianten für orthogonale Substitutionen. Orthogonale Substitutionen sollen diejenigen homogenen linearen Substitutionen sein, durch welche die Abmessungen eines orthogonalen Coordinatensystems auf die eines anderen orthogonalen aber irgendwie gedrehten Coordinatensystems bezogen werden. Wir wollen aber der Kürze wegen diesen specialisirenden Zusatz fortlassen und kurzweg von „Invarianten“ sprechen, da wir hier nur mit dieser einen Art zu thun haben. Auch brauchen wir nur ganze algebraische Functionen dieser Art zu betrachten, da gebrochene, irrationale oder transcendente in unserem Ausdruck φ nicht vorkommen können. Von vornherein ist klar, dafs ein invarianter Ausdruck die auf die drei Axenrichtungen bezüglichen Gröfsen nur in symmetrischer Anordnung enthalten kann, weil eine Vertauschung der Coordinaten seine Form nicht ändern darf. Das letzte Kriterium, um zu entscheiden, ob ein Ausdruck invariant ist, besteht sachgemäfs darin, dafs man die orthogonale Substitution wirklich ausführt. Treten dabei die 9 Richtungscosinus zwischen den Axen der beiden Systeme von Coordinaten nur in den bekannten 12 Gruppirungen auf: 6 Summen dreier Quadrate mit dem Werthe 1, und 6 Summen dreier binärer Producte mit dem Werthe 0, so verschwinden die Richtungsunterschiede aus dem transformirten Ausdruck; hat dieser dann noch die gleiche Form in den beiden Coordinatensystemen, so hat man ihn dadurch als Invariante festgestellt. Diese Transformation führt aber in den meisten Fällen durch umständliche Zwischenrechnungen mit vielgliedrigen Ausdrücken hindurch; deshalb sieht man sich lieber erst nach einfacheren Erkennungsmitteln um.

Einige Invarianten sind wegen ihrer absoluten geometrischen oder physikalischen Bedeutung sofort zu errathen und mögen zur Einführung in dies Gebiet hier angeführt werden. Sind die Componenten einer gerichteten Strecke ϱ mit ξ, η, ζ bezeichnet, so mifst der Ausdruck

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \tag{52}$$

das Quadrat ihrer absoluten Länge. Bei einer Drehung des Axensystems verändern sich zwar die einzelnen Componenten, vorstehende Quadratsumme aber nicht, wie man aus ihrer geometrischen Bedeutung sieht: Der Ausdruck (52) ist eine Invariante.

Ein zweites Beispiel — Verallgemeinerung des vorigen —, in welchem die Componenten zweier gerichteter Strecken ϱ_1 und ϱ_2 vorkommen, ist der Ausdruck:

$$\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2 \,. \tag{52a}$$

Drückt man nämlich die Componenten aus durch die Resultanten und deren Neigungswinkel gegen die Coordinataxen, also $\xi_1 = \varrho_1 \cos(\varrho_1 x)$, $\xi_2 = \varrho_2 \cos(\varrho_2 x)$ etc., so wird der vorstehende Ausdruck

$$= \varrho_1 \varrho_2 \{ \cos(\varrho_1 x) \cos(\varrho_2 x) + \cos(\varrho_1 y) \cos(\varrho_2 y) + \cos(\varrho_1 z) \cos(\varrho_2 z) \}.$$

Die geschweifte Klammer stellt nach den Grundlehren der analytischen Geometrie den Cosinus des Winkels zwischen den Richtungen von ϱ_1 und ϱ_2 dar. Der vorgelegte Ausdruck, gleich $\varrho_1 \varrho_2 \cdot \cos(\varrho_1 \varrho_2)$, ist also nur bedingt durch die beiden gerichteten Strecken selbst und mufs in jedem Coordinatensystem die Form (52a) annehmen, ist daher eine Invariante. H. Grassmann nennt dies Gebilde das innere Product der beiden Strecken ϱ_1 und ϱ_2; es mifst z. B. die Arbeit, wenn ϱ_1 eine Kraft, ϱ_2 die Verrückung ihres Angriffspunktes bedeutet. Auch das sogenannte äufsere Product $\varrho_1 \varrho_2 \cdot \sin(\varrho_1 \varrho_2)$, welches die doppelte durch ϱ_1 und ϱ_2 als Seiten gebildete Dreiecksfläche mifst, mufs aus demselben Grunde invariant sein. Die Projectionen dieser Fläche auf die Coordinatebenen sind angegeben durch Ausdrücke von der Art $(\eta_1 \zeta_2 - \zeta_1 \eta_2)$, und einzeln durchaus veränderlich mit der Richtung der Grundebenen, aber die Summe ihrer Quadrate, der Ausdruck:

$$(\eta_1 \zeta_2 - \zeta_1 \eta_2)^2 + (\zeta_1 \xi_2 - \xi_1 \zeta_2)^2 + (\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2)^2 \tag{52b}$$

giebt die Dreiecksfläche selbst an, sein Werth ist gleich $\varrho_1^2 \varrho_2^2 \sin^2(\varrho_1 \varrho_2)$, er ist also eine Invariante.

Endlich wollen wir aus den Componenten beider Strecken noch den absoluten Werth $(\varrho_1 \cdot \varrho_2)^2$ bilden. Die Ausmultiplication von $(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2)$ liefert folgende neungliedrige Invariante:

$$\begin{aligned} &(\xi_1 \xi_2)^2 + (\xi_1 \eta_2)^2 + (\xi_1 \zeta_2)^2 \\ &+ (\eta_1 \xi_2)^2 + (\eta_1 \eta_2)^2 + (\eta_1 \zeta_2)^2 \\ &+ (\zeta_1 \xi_2)^2 + (\zeta_1 \eta_2)^2 + (\zeta_1 \zeta_2)^2. \end{aligned} \tag{52c}$$

Hat man drei gerichtete Strecken $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ im Raume, so wird der sechsfache Inhalt des dadurch bestimmten Tetraeders aus den Componenten berechnet durch die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \xi_1(\eta_2 \zeta_3 - \zeta_2 \eta_3) + \eta_1(\zeta_2 \xi_3 - \xi_2 \zeta_3) + \zeta_1(\xi_2 \eta_3 - \eta_2 \xi_3). \tag{52d}$$

Die für jedes Axensystem gleichbleibende geometrische Bedeutung des Ausdruckes ist eine Gewähr, dafs er eine Invariante ist.

Ebenso wie Componenten gerichteter Strecken verhalten sich die partiellen Differentialquotienten von Coordinatenfunctionen. Hat man nämlich eine im Raum stetig von Ort zu Ort veränderliche Gröfse U

vorgeschrieben, so giebt es im Allgemeinen für jeden Ort eine bestimmte Richtung n, in welcher diese Gröfse am steilsten zunimmt. Dieses maximale Wachsthum wird gemessen durch den Differentialquotienten $\partial U / \partial n$, dessen Werth sowohl wie die Richtung n allein durch die räumliche Anordnung der Gröfse U bedingt wird, unabhängig von den Coordinaten; letzteres gilt wenigstens, wenn nicht U schon an und für sich auf ein bestimmtes Coordinatensystem Bezug hat, etwa selbst eine Componente einer geordneten Vectorvertheilung im Raume darstellt; sicher gilt das Gesagte, wenn U eine ungerichtete Gröfse vorstellt. In beliebiger Richtung ϱ findet man dann das Wachsthum durch die Beziehung:

$$\frac{\partial U}{\partial \varrho} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos(n \varrho).$$

Stellt man U als Function bestimmter Coordinaten x, y, z dar, so ist deshalb:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos(n x), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos(n y), \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos(n z).$$

Diese Ausdrücke sind gebildet wie die Componenten einer gerichteten Strecke von der Länge $(\partial U / \partial n)$ und der Richtung n, nur haben wir es nicht mit einer wirklichen Strecke, sondern mit einem allgemeineren Vector zu thun. Wir können also in den gefundenen Invarianten an Stelle der Componenten die entsprechenden Differentialquotienten von U einsetzen. Aus (52) findet man:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \tag{52e}$$

als Invariante, diese mifst das Quadrat des steilsten Wachsthums.

Aus (52a) kann man zwei neue Formen finden. Erstens möge ϱ_1, also ξ_1, η_1, ζ_1 eine kleine Verrückung des Beobachtungsortes der Function U sein, statt der Indices 2 werden die Differentialquotienten gesetzt. Man bekommt dann:

$$\xi_1 \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \eta_1 \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \zeta_1 \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \tag{52f}$$

als Invariante, deren Bedeutung nach der unter (52a) gemachten Rechnung $\varrho_1 \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right) \cdot \cos(n \varrho_1)$ oder kürzer $\varrho_1 \cdot \frac{\partial U}{\partial \varrho_1}$ also die Veränderung des Werthes U bei dem kleinen Schritt ϱ_1 ist. Zweitens können wir aber auch zwei Functionen U_1 und U_2 im Raume definirt denken, dann erhalten wir die Invariante

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial z} \tag{52g}$$

mit der Bedeutung $\left(\frac{\partial U_1}{\partial n_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial U_2}{\partial n_2}\right) \cos(n_1 n_2)$.

Wir wollen jetzt eine wichtige allgemeine Regel anführen, durch welche man aus den gefundenen Invarianten neue bilden kann: Man darf in einer aus mehreren Elementen zusammengesetzten Invariante die als Factoren vorkommenden Componenten des einen Elementes — wir wählen $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ — ersetzen durch die Operationszeichen $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, welche Differentiation anzeigen für diejenigen Gröfsen, welche in dem „alten" Ausdruck mit ξ_1 resp. η_1 und ζ_1 zu Producten verbunden waren: der entstehende „neue" Ausdruck ist dann auch eine Invariante. Zum allgemein gültigen Beweise dieser Behauptung müssen wir wohl auf die orthogonalen Substitutionen selbst eingehen. Wir haben das Material dazu schon früher gebraucht, vergl. S. 34—35, und wollen hier dieselben Bezeichnungen für die 9 Richtungscosinus anwenden, wie dort in der Tabelle (14a) angegeben. Soll der alte Ausdruck, welcher die Factoren ξ_1, η_1, ζ_1 enthält, auf die Coordinaten $x'\,y'\,z'$ transformirt werden, so hat man (entsprechend den Gleichungen (14b)) zu setzen:

$$\xi_1 = \alpha_1\,\xi_1' + \alpha_2\,\eta_1' + \alpha_3\,\zeta_1', \tag{53}$$

η_1 und ζ_1 analog. In dem neuen Ausdruck, welcher statt dessen die Symbole $\partial/\partial x, \ldots$ enthält, mufs man beachten, dafs nach der Transformation als Variabele $x'\,y'\,z'$ anzunehmen sind, dafs man also das bekannte Schema anzuwenden hat:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\quad\Big) = \frac{\partial}{\partial x'}\Big(\quad\Big) \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'}\Big(\quad\Big) \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z'}\Big(\quad\Big) \cdot \frac{\partial z'}{\partial x}.$$

Aus den umgekehrten Substitutionsgleichungen (14d), welche x', y', z' ausdrücken, liest man ab:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \alpha_1, \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = \alpha_2, \quad \frac{\partial z'}{\partial x} = \alpha_3,$$

es ist also zu setzen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\quad\Big) = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x'}\Big(\quad\Big) + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y'}\Big(\quad\Big) + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z'}\Big(\quad\Big). \tag{53a}$$

In der vollkommenen Uebereinstimmung dieses Schemas (53a) mit dem vorigen (53) liegt nun der Beweis. Denn alle übrigen Bestandtheile sind im alten und neuen Ausdruck die gleichen, werden also durch die Substitutionen in gleicher Weise transformirt. Alle Cosinuscombinationen müssen deshalb für beide transformirten Ausdrücke die gleichen sein, der einzige Unterschied besteht darin, dafs der neue die Symbole $\partial/\partial x'$, $\partial/\partial y'$, $\partial/\partial z'$ zeigt, wo der alte die Factoren ξ_1', η_1', ζ'_1 führt. Ist daher der alte invariant, so ist es auch der neue.

Diese Regel können wir nun direct anwenden auf die alten Formen (52a, b, c, d, f) und finden dadurch der Reihe nach folgende Ausbeute neuer Invarianten, in denen die jetzt zur Unterscheidung nicht mehr nöthige Indices der Componenten $\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2$ weggelassen sind:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \tag{54a}$$

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \tag{54b}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{54c}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta_2\,\zeta_3 - \zeta_2\,\eta_3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_2\,\xi_3 - \xi_2\,\zeta_3\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\xi_2\,\eta_3 - \eta_2\,\xi_3\right) \tag{54d}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{54e}$$

Hier kann man ξ, η, ζ nun nicht mehr als Componenten einer einzelnen gerichteten Strecke ansehen, dann hätten die Differentialquotienten nach den Axenrichtungen keinen Sinn; man mufs vielmehr annehmen, dafs jedem Raumpunkt eine solche Strecke zugeordnet ist in der Weise, dafs deren Componenten differenzirbare Functionen des Ortes sind. Dies führt zu derselben Vorstellung, welche wir uns von den geordneten Verrückungen der materiellen Punkte in einem continuirlichen Massenbereich gebildet haben, einer Vorstellung, der man übrigens auch noch in anderen Theorien begegnet, wo ξ, η, ζ nicht direct Strecken bezeichnen. In der modernen Vector-Analysis bezeichnet man den Ausdruck (54a) als die „Divergenz von ϱ"; der zweite Ausdruck (54b) ist das Quadrat des sogenannten „Curl von ϱ". Die Divergenz ist eine ungerichtete, der Curl eine gerichtete Gröfse; beide messen gewisse Eigenschaften, welche nur von der räumlichen Anordnung der gerichteten Gröfse ϱ rings um eine beobachtete Stelle herum abhängen, nicht aber von dem Coordinatensystem, in welchem sie ausgedrückt sind. Die dritte Invariante (54c) werden wir sogleich verwenden, die beiden letzten sind nur der Vollständigkeit wegen angeführt; (54d) könnte man bezeichnen als Divergenz des äufseren Productes von ϱ_2 und ϱ_3; (54e) ist die berühmte Operation ΔU, welche man sehr häufig zu bilden hat. Deren Invarianz hängt aber, wie gesagt, davon ab, dafs U selbst keine Beziehungen auf ein besonderes Coordinatensystem enthält. Beispielsweise haben wir soeben die Componente ξ als stetige Function der Coordinaten x, y, z eingeführt; bilden wir nun $\Delta \xi$, so ist das keine Invariante, weil die Function ξ je nach der Richtung der x-Axe ihre Werthe ändert.

Wir wollen hiermit die allgemeinen Betrachtungen abschliefsen, und einige Früchte derselben anwenden auf den Fall, dafs ξ, η, ζ die kleinen Verrückungen der materiellen Punkte in einem continuirlichen Massenbereich bedeuten. Führen wir die uns gewohnten Bezeichnungen aus Gleichungen (10a'.) ein:

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = a & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} = n - \nu & \dfrac{\partial \xi}{\partial z} = m + \mu \\[2ex]
\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = n + \nu & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = b & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} = l - \lambda \\[2ex]
\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} = m - \mu & \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} = l + \lambda & \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} = c,
\end{array}$$

so lassen sich die 3 Invarianten (54a, b, c) sofort in unseren Deformationsdaten ausdrücken. (54a) liefert

$$(a + b + c), \tag{55a}$$

(54b) liefert

$$4\,(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2); \tag{55b}$$

in dem dritten Ausdruck (54c) kann man die Quadrate der Binome $(l + \lambda)^2$ und $(l - \lambda)^2$ etc. ausführen, dann heben sich alle Doppelproducte weg und man erhält die Invariante

$$(a^2 + b^2 + c^2) + 2\,(l^2 + m^2 + n^2) + 2\,(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2). \tag{55c}$$

Die erste mifst nach Gleichung (18c), Seite 39, die Volumdilatation ω, die zweite ist das Quadrat von $2\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$; dies mifst nach Gleichung (11 d), Seite 23, das Doppelte des Winkels, um welchen eine Stelle der Substanz gedreht ist. Die Volumdehnung ist die Divergenz der Verrückungen. Die Drehung ist der Curl der Verrückungen, seine Richtung ist die in § 9 eindeutig definirte Axe der Drehung, seine Componenten sind die doppelten Drehungswinkel um die Coordinataxen 2λ, 2μ, 2ν. Aus (55c) können wir noch andere invariante Formen herauslesen. Findet sich nämlich in solch einer zusammengesetzten Invariante ein Bestandtheil, der für sich allein schon invariant ist, so kann man diesen streichen; das Uebrigbleibende mufs dann auch für sich allein invariant sein. In (55c) trifft dies für die letzte Klammer zu, welche nach (55b) invariant ist, also erkennt man, dafs

$$(a^2 + b^2 + c^2) + 2(l^2 + m^2 + n^2) \tag{55d}$$

auch eine Invariante ist. Noch einen anderen Theil kann man herauslösen. Ergänzt man nämlich die erste Klammer durch Hinzufügung der Doppelproducte $+ 2bc + 2ca + 2ab$ zum vollständigen Quadrat, so mufs man, um den Werth nicht zu stören, diese auch wieder abziehen und findet die Invariante:

$$(a + b + c)^2 - 2\left\{(bc + ca + ab) - (l^2 + m^2 + n^2)\right\}. \tag{55e}$$

Da nun hier wieder das erste Glied als Quadrat der Volumdehnung für sich allein invariant ist, mufs auch der andere Theil, welcher in geschweifte Klammer geschlossen ist:

$$(bc + ca + ab) - (l^2 + m^2 + n^2) \tag{55f}$$

eine Invariante sein.

Es mag ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dafs die in den vorstehenden Formen allenthalben vorkommenden Glieder:

$$(a^2 + b^2 + c^2), \quad (bc + ca + ab), \quad (l^2 + m^2 + n^2)$$

einzeln keine Invarianten sind. Am leichtesten sieht man das an dem zuletzt aufgeführten. Dreht man nämlich das Coordinatensystem so, dafs es mit den Hauptdilatationsaxen zusammenfällt, so werden in den Abmessungen dieses Systems für jede beliebige Deformation $l = m = n = 0$, also auch $(l^2 + m^2 + n^2) = 0$, während dies bei beliebiger Richtung des Axensystems im Allgemeinen nicht zutrifft; dieser Werth ist also veränderlich mit der Richtung der Coordinaten. Alsdann folgt, dafs auch die beiden anderen Glieder nicht invariant sein können, denn diese müssen doch die Schwankungen des $(l^2 + m^2 + n^2)$ in den Invarianten (55d und f) wieder ausgleichen.

Der in diesem Paragraphen gemachte mathematische Excurs wurde mehr zu dem Zwecke unternommen, bei dieser passenden Gelegenheit die in verschiedenen Kapiteln der Physik und Geometrie auftretenden invarianten Gebilde zusammenzustellen. Von den vielen gefundenen Formen werden wir für unseren gegenwärtigen Zweck nur die beiden (55a) und (55f) gebrauchen; diese lassen sich aber, unabhängig vom Vorhergehenden, mittels anderer Ueberlegungen, die wir bereits im kinematischen Theile durchgeführt haben, auf einfachere Art auffinden. Die Gröfsen der Haupt-Dilatationen σ_1, σ_2, σ_3 müssen nämlich Invarianten sein, denn sie werden nur durch die Natur der Deformation bestimmt, nicht durch das zufällige Coordinatensystem. In den Gleichungen (15), Seite 35, sieht man deutlich, wie die 6 Zahlen a bis n nur dadurch von den Coordinaten abhängig werden, dafs die Richtungscosinus zwischen den Haupt-Dilatationsaxen und dem willkürlichen Coordinatensystem mit eingehen. Ursprünglich waren nun diese σ_1, σ_2, σ_3 eingeführt als die nothwendig reellen Wurzeln der cubischen Gleichung (13c) Seite 28

$$\sigma^3 - (a + b + c)\,\sigma^2 + (b\,c + c\,a + a\,b - l^2 - m^2 - n^2)\,\sigma$$
$$- \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix} = 0.$$

Könnte man die Wurzeln explicite durch die Coefficienten ausdrücken, so hätte man dadurch sogleich 3 invariante Zusammensetzungen der Deformationsdaten gefunden. Dies wäre aber sehr umständlich und würde scheinbar complexe und durch Quadrat- und Cubikwurzeln irrationale Formen geben. Bekanntlich sind aber die Coefficienten jeder algebraischen Gleichung in der Normalform gleich den ganzen symmetrischen Functionen verschiedener Grade der Wurzeln; für die cubische Gleichung im Besonderen ist der Coefficient des quadratischen Gliedes gleich der negativen Summe der Wurzeln, der Coefficient des linearen Gliedes gleich der Summe der binären Wurzelproducte, und das constante Glied gleich dem negativen Product aller Wurzeln. Man liest daher aus unserer Gleichung (13c) direct folgende Beziehungen ab:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = (a + b + c). \tag{56a}$$

$$\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 = (bc + ca + ab) - (l^2 + m^2 + n^2). \tag{56b}$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix}. \tag{56c}$$

Da nun σ_1, σ_2, σ_3 einzeln invariant sind, so sind es auch die daraus zusammengestellten symmetrischen Functionen, mithin liefern uns die vorstehenden Gleichungen auf den rechten Seiten 3 Invarianten. Die beiden ersten sind diejenigen, welche wir vorher in (55a und f) auf anderem Wege gefunden hatten und die für das Folgende von Bedeutung sind. Die dritte in Determinantenform ist für uns hier nicht verwendbar, weil bereits von dritter Ordnung.

§ 31. Die Function φ für isotrope Körper.

Nun wenden wir uns zurück zu der im Anfang des vorigen Paragraphen motivirten Forderung, daſs φ für isotrope Körper eine Invariante sein muſs. In dem Ausdruck (50), welcher noch dem regulären Krystallsystem entspricht, kommen gerade diejenigen drei Zusammenstellungen vor, von denen wir gesehen haben, daſs sie einzeln nicht invariant sind. Es ist aber leicht, Invarianten in diese Form hineinzuschaffen durch Zusatz von Gliedern, die sich natürlicherweise gegenseitig vernichten müssen. Man kann es so erreichen, daſs φ zusammengesetzt erscheint aus zwei Invarianten und einem dritten nicht invarianten Gliede; letzteres kann man nach Belieben durch die Gruppe $(a^2 + b^2 + c^2)$ oder $(bc + ca + ab)$ oder endlich $(l^2 + m^2 + n^2)$ darstellen, für die Betrachtung ist das gleichgültig: Wir wollen die letzte Gruppe beibehalten.

Wir fügen zur Gleichung (50) zunächst hinzu

$$\pm 2A(bc + ca + ab)$$

und erhalten:

$$\varphi = A(a + b + c)^2 + 2(B - A)(bc + ca + ab) + C(l^2 + m^2 + n^2).$$

Ferner fügen wir hinzu

$$\mp 2(B - A)(l^2 + m^2 + n^2)$$

und finden so einen Ausdruck, der zunächst nur als Umformung von (50) erscheint:

$$\varphi = A\,(a+b+c)^2 + 2\,(B-A)\Big\{(bc+ca+ab) - (l^2+m^2+n^2)\Big\}$$
$$+ (C+2B-2A)(l^2+m^2+n^2). \tag{57}$$

Die beiden ersten Glieder sind invariant, das letzte aber nicht. Invariant ist der ganze Ausdruck also nur, wenn das letzte Glied für jedes Coordinatensystem verschwindet. Die Isotropie fordert also zwischen den drei übrig gebliebenen Coefficienten die Beziehung

$$C + 2B - 2A = 0, \tag{57a}$$

durch welche man abermals die Verfügung über einen Coefficienten verliert, so dafs schliefslich nur zwei übrig bleiben. Einstweilen wollen wir die Zeichen A und B für diese beibehalten, man erhält dann das φ für isotrope Körper dadurch, dafs man in (57) das letzte Glied wegstreicht. Vermittelst der Gleichungen (56a und b) kann man die beiden Invarianten durch die Haupt-Dilatationen ausdrücken, der Ausdruck wird dadurch frei von jeder Beziehung auf ein Coordinatensystem und lautet zunächst:

$$\varphi = A\cdot(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 + 2\,(B-A)\cdot(\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1+\sigma_1\sigma_2). \tag{57b}$$

Dafs er nur durch symmetrische Functionen der Wurzeln σ zusammengesetzt sein kann, ist einleuchtend, denn ein Wechsel in der Deformation der Art, dafs zwei Haupt-Dilatationen ihre Gröfse vertauschen, darf bei isotropen Körpern φ nicht verändern.

An diesen einfachen Ausdruck (57b) wollen wir nun auch die bis jetzt immer bei Seite gelassene Bedingung stellen, welche die Stabilität des Gleichgewichtes der Substanz im natürlichen Zustande fordert: Die Function φ mufs wesentlich positiv sein für jede beliebige Deformation. Die jetzige Gestalt ist zu einer Entscheidung hierüber noch nicht geeignet, da die Gruppe $\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1+\sigma_1\sigma_2$ unsicheres Vorzeichen besitzt; diese müssen wir also durch eine andere zu ersetzen suchen, welche stets positiv ist. Nun kann man aus drei Elementen eine ganze Reihe von verschiedenen ganzen symmetrischen Functionen zweiten Grades zusammensetzen; wir führen hier nur die vier an, welche wir nöthig haben:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 \\ S_2 &= \sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2 \\ S_3 &= \sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1+\sigma_1\sigma_2 \\ S_4 &= (\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2+(\sigma_1-\sigma_2)^2. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Für solche Bildungen gilt nun das Gesetz, daſs sich alle durch zwei beliebig unter ihnen ausgewählte Grundformen linear und homogen ausdrücken lassen. Sofort einzusehen ist dies, wenn man S_2 und S_3 als Grundformen wählt, denn diese müssen immer auftreten, sobald man in den anderen die Quadrate oder Producte auflöst. Für unsere Formen (58) findet man die beiden Beziehungen:

$$S_1 = S_2 + 2\,S_3 \quad \text{und} \quad S_4 = 2\,S_2 - 2\,S_3\,. \tag{58a}$$

Diese kann man dann benutzen auch bei der Wahl anderer Grundformen. Durch sehr einfache Umrechnungen findet man:

1. Für die Grundformen S_1 und S_2

$$S_3 = \tfrac{1}{2}S_1 - \tfrac{1}{2}S_2 \quad \text{und} \quad S_4 = -\,S_1 + 3\,S_2\,. \tag{58b}$$

2. Für die Grundformen S_1 und S_4

$$S_2 = \tfrac{1}{3}S_1 + \tfrac{1}{3}S_4 \quad \text{und} \quad S_3 = \tfrac{1}{3}S_1 - \tfrac{1}{6}S_4\,. \tag{58c}$$

Andere Paare von Grundformen brauchen wir nicht zu betrachten.

Die Formen S_2 und S_4 besitzen nun für unsere Frage den Vorzug, daſs sie als Quadratsummen stets positiv sind; man wird daher eine von ihnen an Stelle von S_3 in φ einführen. Die Form S_1, welche ebenfalls positiv ist, wird man wegen ihrer anschaulichen Bedeutung als Quadrat der Volumdehnung jedenfalls beibehalten. Die unter (58b) stehende Substitution führt zu der von Gustav Kirchhoff gewählten Normalform für φ. Es ist vortheilhaft, diese Form vor allen kennen zu lernen, weil von Kirchhoff umfassende Arbeiten über die elastischen Deformationen und Kräfte in verschieden gestalteten Körpern, Stäben, Spiralen, Platten, ausgegangen sind, und die dabei verwendeten Bezeichnungen klassische Bedeutung und allgemeine Verbreitung gewonnen haben. Wir machen also in Gleichung (57b), welche mit Benützung unserer Zeichen lautet:

$$\varphi = A \cdot S_1 + 2\,(B - A) \cdot S_3\,,$$

die Substitution (58b):

$$S_3 = \tfrac{1}{2}\,S_1 - \tfrac{1}{2}\,S_2$$

und gewinnen dadurch

$$\varphi = B\,S_1 + (A - B) \cdot S_2\,.$$

Kirchhoff hat dann noch andere Bezeichnungen für die elastischen Constanten benützt, einen Modul K und eine unbenannte Verhältnifszahl θ, welche mit unseren bisher benützten in der einfachen Beziehung stehen:

$$\left.\begin{aligned} A - B &= K \\ B &= K \cdot \theta. \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

Setzt man endlich noch für S_1 und S_2 die ausführlichen Ausdrücke, so erhält man die KIRCHHOFF'sche Normalform:

$$\varphi = K \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + K\theta \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \qquad (60)$$

Will man statt der σ die auf ein bestimmtes Coordinatensystem bezogenen 6 Variabelen a bis n einführen, so mufs man zunächst die im ersten Gliede stehende Gruppe S_2 durch die Gleichung (58a) $S_2 = S_1 - 2\,S_3$ auf die Anwendung von (56a und b) vorbereiten. Man findet

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 &= (a + b + c)^2 - 2\,(b\,c + c\,a + a\,b - l^2 - m^2 - n^2) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2) + 2\,(l^2 + m^2 + n^2). \end{aligned}$$

Dieser Invariante sind wir auf anderem Wege schon in (55d) begegnet. Die Normalform wird also:

$$\varphi = K\left\{(a^2 + b^2 + c^2) + 2\,(l^2 + m^2 + n^2)\right\} + K\theta \cdot (a + b + c)^2 \qquad (60\text{a})$$

oder ganz ausführlich ohne abkürzende Symbole

$$\begin{aligned} \varphi = K \cdot \left\{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]\right\} \\ + K\theta \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2. \end{aligned} \qquad (60\text{b})$$

Als Kriterium der Stabilität scheint aus diesen Formen hervorzugehen, dafs für alle in natürlichem Ruhezustand denkbaren Körper sowohl der Coefficient K als auch die Zahl θ positiv sein müssen; wir werden aber nachher sehen, dafs für θ diese Beschränkung etwas zu enge ist.

Es ist nun vortheilhaft in dem Ausdrucke φ diejenigen Daten, welche die Volumänderung darstellen, vollständig zu trennen von denen, welche eine reine Gestaltänderung bei constantem Volumen anzeigen, weil durch die Widerstände gegen diese beiden Componenten der allgemeinen Deformationen zwei von einander unabhängige elastische Eigenschaften der Körper charakterisirt werden. Die Klasse der flüssigen Körper scheidet sich von der der festen dadurch, dafs erstere — abgesehen von den aufserordentlich viel schwächeren Kapillarkräften, die wir hier nicht berücksichtigen — keinen Widerstand gegen reine Gestaltänderungen äufsern, während der Widerstand gegen Volumveränderungen beiden Klassen in gleicher Weise zukommt. In der von KIRCHHOFF im ersten Gliede gewählten symmetrischenFunction $(\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2)$ steckt nun noch verborgen ein Antheil der Volum-Dilatation, welche doch explicite erst in dessen zweiten Gliede mit $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$ auftritt. Deshalb mifst auch der Coefficient des zweiten Gliedes, $K\theta$, für feste Körper nicht den ganzen Widerstand gegen Volumveränderung. Die reine Gestaltänderung dagegen beeinflufst nur das erste Glied, wenn auch wegen der fremden Beimengung nicht in anschaulicher Weise, aber sie steckt vollständig darin; deshalb ist auch der Coefficient K dieses Gliedes das volle Mafs der Form-Elasticität, d. i. des Widerstandes gegen reine Gestaltänderungen. Eine zweite Schwierigkeit des KIRCHHOFF'schen Ausdruckes besteht darin, dafs man bei dessen Anwendung auf flüssige Körper $K = 0$ setzen mufs, weil diese eben keine Form-Elasticität besitzen, während der Coefficient $K\theta$ des zweiten Gliedes dann den ganzen Widerstand der Flüssigkeit gegen Volumveränderung angeben, daher einen bedeutenden Werth repräsentiren mufs. Dadurch wird man gezwungen θ unendlich grofs zu setzen, so dafs man das unbestimmte Gebilde $0 \cdot \infty$ erhält.

Beiden Schwierigkeiten entgeht man, wenn man von Anfang an die beiden eben erwähnten Arten von Deformation aus einander hält. Wir können uns dabei auf § 14 stützen, wo nachgewiesen wurde, dafs man die allgemeine Deformation erzeugen kann durch Superposition einer reinen Volumveränderung, deren Gröfse durch die Summe $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \omega$ gemessen wird, und einer reinen Gestaltänderung, welche man erzeugen kann lediglich durch Scheerungen, deren Gröfsen nur durch die Differenzen zwischen den Haupt-Dilatationen $(\sigma_2 - \sigma_3)$, $(\sigma_3 - \sigma_1)$, $(\sigma_1 - \sigma_2)$ bestimmt werden. Man betrachte zur Bekräftigung des Gesagten die Gleichungen (26), Seite 51.

Es bietet sich deshalb an Stelle der von KIRCHHOFF gewählten symmetrischen Function S_2 als Ersatz für die unbrauchbare Function S_3 die mit S_4 bezeichnete dar, welche nur die für die Scheerungen mafsgebenden Differenzen enthält, S_1 wird selbstverständlich beibehalten. Wir machen also jetzt in dem ursprünglichen Ausdruck (57 b)

$$\varphi = A\,S_1 + 2\,(B - A)\,S_3$$

nach (58 c) die Substitution:

$$S_3 = \frac{1}{3} S_1 - \frac{1}{6} S_4,$$

und gewinnen die Umformung:

$$\varphi = (\tfrac{1}{3} A + \tfrac{2}{3} B) S_1 + \tfrac{1}{3}(A - B) S_4 .$$

Der Coefficient des zweiten Gliedes ist nach Gleichung (59) gleich einem Drittel der KIRCHHOFF'schen Constante K; dieses Zeichen wollen wir beibehalten. Für den Coefficienten des ersten Gliedes wollen wir aber einführen:

$$\tfrac{1}{2} H = \tfrac{1}{3} A + \tfrac{2}{3} B. \tag{61}$$

Führt man dann noch die Ausdrücke für S_1 und S_4 aus (58) ein, so erhält man die HELMHOLTZ'sche[1] Normalform:

$$\varphi = \tfrac{1}{2} H \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \tfrac{1}{3} K \left\{ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \right\}. \tag{62}$$

In dieser Form stellt das erste Glied die volle aus dem Widerstand gegen Volumveränderung, das zweite Glied die volle aus dem Widerstand gegen Scheerungen stammende elastische Energie dar, jedes Ding unabhängig vom anderen. Man kann die Coefficienten kurz danach benennen: H ist der Volum-Modul, K der Form-Modul. Die Zahlenfactoren $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ sind mit Vorbedacht den beiden Moduln nicht einverleibt worden.

Wünscht man auch in dieser Normalform die Gröſsen a bis n einzuführen, so muſs man statt der zweiten symmetrischen Function nach Gleichung (58 c) setzen $S_4 = 2 S_1 - 6 S_3$, bevor man die Invarianten (56 a und b) einführt. Man findet:

$$\begin{aligned} S_4 &= 2(a + b + c)^2 - 6(bc + ca + ab - l^2 - m^2 - n^2) \\ &= (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 + 6(l^2 + m^2 + n^2) \end{aligned}$$

also:

$$\varphi = \tfrac{1}{2} H (a + b + c)^2 + \tfrac{1}{3} K \left\{ (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 + 6(l^2 + m^2 + n^2) \right\}. \tag{62a}$$

Führt man auch hier noch die Differentialquotienten der Verrückungen statt der kurzen Zeichen a bis n ein, so findet man in ausführlicher Schreibweise die HELMHOLTZ'sche Normalform:

---

[1] Diese Benennung, analog „KIRCHHOFF'sche Normalform", erlaubt sich der Herausgeber in den Text zu setzen, da die Formel (62), soweit ihm bekannt, von HELMHOLTZ herrührt. D. H.

$$\left.\begin{aligned}
\varphi = \tfrac{1}{2} H \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2 \\
+ \tfrac{1}{3} K \cdot \left\{\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right\} \\
+ \tfrac{1}{2} K \cdot \left\{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{62 b}$$

Will man in beiden Normalformen noch darauf Rücksicht nehmen, dafs man als natürliche Zustände oft nicht diejenigen ansehen kann, in denen alle äufseren Kräfte fehlen, sondern dafs man dabei noch mit einem allgemeinen Druck p zu thun hat, unter welchem die Körper auch in ihrer undeformirten Gestalt stehen, so hat man noch ein lineares Glied hinzuzufügen; für die Gase haben wir diesen Umstand sogar hauptsächlich und meist allein zu berücksichtigen und haben bereits am Schlusse des § 26 in Gleichung (46) dieses lineare Glied aufgestellt. Daselbst haben wir auch gezeigt, dafs der Coefficient dessselben gleich $-p$ sein mufs. Wir tragen also diesem Umstand Rechnung, wenn wir in den Gleichungen (60) und (62) rechts hinzufügen das Glied

$$-p \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \tag{63}$$

in den Gleichungen (60 a) und (62 a) dementsprechend

$$-p \cdot (a + b + c) \tag{63 a}$$

und in den Gleichungen (60 b) und (62 b)

$$-p \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right). \tag{63}$$

Für die meisten Anwendungen auf feste und tropfbar-flüssige Körper kann man indessen dieses Glied der elastischen Energie weglassen, weil der Druck p, unter welchem die Körper im Anfangszustand stehen — meistens ist es der Atmosphärendruck — völlig verschwindet gegen die bedeutende Gröfse der Coefficienten H und K.

§ 32. Ueber die verschiedenen Werthe der Zahl θ und des Gröfsenverhältnisses zwischen H und K.

Die beiden Normalformen für φ, Gleichungen (60) und (62), wurden parallel neben einander aus der gemeinsamen Urform (57 b) hergeleitet; die Coefficienten K und θ einerseits, und H und K andererseits waren also auf die ursprünglichen A und B bezogen. Da es nun von Interesse ist, den Modul H direct auf die Kirchhoff'schen Constanten beziehen zu können und durch diese auszudrücken, müfste man aus den drei unter (59) und (61) stehenden Relationen A und B eliminiren, was sehr leicht zu dem gesuchten Ausdruck führt. Wir wollen ihn hier dadurch auffinden, dafs wir die Kirchhoff'sche Normalform (60) durch die erste der Gleichungen (58 c), welche lautet $S_2 = \frac{1}{3} S_1 + \frac{1}{3} S_4$, direct auf die Helmholtz'schen Gruppen S_1 und S_4 transformiren. Es ist also:

$$\varphi = K \cdot (\tfrac{1}{3} S_1 + \tfrac{1}{3} S_4) + K\theta \cdot S_1$$

oder anders geordnet

$$\varphi = \tfrac{1}{2} \left[2\, K(\theta + \tfrac{1}{3}) \right] \cdot S_1 + \tfrac{1}{3} K \cdot S_4$$

Der Factor der Gruppe S_1 mufs $\frac{1}{2} H$ darstellen, also ist:

$$H = 2\, K \cdot (\theta + \tfrac{1}{3}). \tag{64}$$

Umgekehrt, wenn man θ durch H und K ersetzen will:

$$\theta = \frac{H}{2\, K} - \tfrac{1}{3}. \tag{64 a}$$

Das Kriterium der Stabilität an die Helmholtz'sche Normalform gestellt, fordert, dafs sowohl K wie H positiv sein müssen, höchstens darf einer der beiden Moduln gleich Null sein; dies tritt z. B. für K bei Flüssigkeiten ein, wodurch dann die Normalform (62 a) sich auf die schon früher in Gleichung (45) S. 95 für diesen Fall hergeleitete Form reducirt.

Die Bedingung für θ kann man direct aus Gleichung (64) ablesen: Es mufs, damit H positiv bleibe, $(\theta + \frac{1}{3}) > 0$ sein. Danach kann θ eventuell sogar unter Null sinken bis gegen $-\frac{1}{3}$; diese Möglichkeit liefs sich aus der Normalform (60) nicht einfach erkennen. Es soll damit aber nicht gesagt sein, dafs sich Naturkörper finden müssen, für die θ negativ ist.

Aus der Poisson'schen Elasticitätstheorie, welche wir in der Einleitung zu diesem Bande schon kurz charakterisirten, versuchte man lange die Forderung aufrecht zu erhalten, dafs die Zahl θ für alle festen Körper den gemeinsamen Werth $\frac{1}{2}$ haben müfste, und Messungen (welche wir noch werden zu besprechen haben) bestätigten in der That für die Klasse der allerfestesten elastischen Körper,

z. B. Glas und Guſsstahl, dieses theoretische Resultat und stützten dadurch die hypothetischen Grundlagen jener Theorie, welche mit Fernkräften zwischen den Molekeln operirt, unter Zuhülfenahme von vereinfachenden Annahmen, welche die Durchrechnung überhaupt erst ermöglichen. Aber für die meisten anderen elastischen Stoffe, welche eine allgemeine Theorie doch auch umfassen sollte, stellten sich Abweichungen heraus, welche die Beobachtungsfehler weit überschritten, so daſs für sie der Ansatz $\theta = \frac{1}{2}$ nur eine grobe Annäherung bedeutet. Das ist schon bei vielen recht festen Metallen spürbar. Die Voraussetzungen jener Theorie müssen eben zu enge sein, und nur die allerfestesten Körper mögen sich ihrer Erfüllung nähern.

Nun denke man gar an die gallertartigen Körper und an Kautschuk, welche doch deutlich ausgeprägte elastische Eigenschaften haben. Sie besitzen die Eigenthümlichkeit, daſs ihr Widerstand gegen Schiebungen der Schichten sehr gering ist, so daſs man in ihnen bedeutende Verzerrungen hervorrufen kann durch verhältnissmäſsig sehr geringe Kräfte. Das Volumen freilich wird bei diesen leicht erzielten Verzerrungen gar nicht verändert; will man aber diese nachgiebigen Körper zu einer Volumveränderung zwingen, sie z. B. in einer abgeschlossenen Büchse, in der sie nicht seitwärts ausweichen können, durch einen Stempel comprimiren, so bemerkt man, daſs sie dagegen einen ebenso mächtigen Widerstand leisten, wie etwa die Flüssigkeiten, also nicht viel weniger als auch die festen Körper. Die Gallerten bilden durch ihre geringe Formfestigkeit eine Zwischenstufe zwischen den eigentlich festen Körpern und den Flüssigkeiten, welche gar keine Formfestigkeit besitzen; sie unterscheiden sich aber von letzteren doch scharf dadurch, daſs der geringe Widerstand gegen Schiebungen ein dauernder ist. Wenn man eine in einer Hohlform hergestellte Gelatine-Gallerte umstürzt und auf eine horizontale Unterlage legt, so sinkt sie merklich zusammen und baucht sich an den Seiten aus; diese Deformation erreicht aber eine Grenze, bei der die schwachen elastischen Kräfte gerade die Schwere des Materiales tragen und die Masse somit am weiteren Einsinken dauernd verhindern. Auch die zitternden Bewegungen, welche erschütterte Gallerten ausführen, weisen deutlich auf die Conservativität der inneren Kräfte hin; es sind dies elastische Transversalschwingungen wie in tönenden festen Körpern, sie verlaufen in diesem Falle nur so langsam, daſs man sie mit den Augen verfolgen kann, weil der Form-Modul K, von dem die Schwingungsdauern abhängen, einen so abnorm kleinen Werth besitzt. Das verhältnissmäſsig rasche Ersterben dieses

Bebens weist allerdings nebenbei noch auf innere Reibungskräfte hin, doch spielen diese im Verhalten der Gallerten mehr untergeordnete Rolle. Wesentlich verschieden davon verhalten sich wahre Flüssigkeiten mit inneren Reibungskräften: Oele, Harze, Balsame, Theer etc. Diese können mitunter einen hohen Grad von Zähigkeit besitzen und Verschiebungen der Schichten viel stärkeren Widerstand entgegensetzen, als die Gallerten, aber diese Kräfte sind keine dauernden, sie währen nur so lange wie der Vorgang des Verschiebens und sind dessen Geschwindigkeit proportional. Solche Körper kommen unter der Wirkung der Schwere erst dann zu dauernder Ruhe, wenn sie sich mit horizontaler spiegelglatter Oberfläche eingestellt haben, man mufs nur lange genug warten.

In den Gallerten und auch im Kautschuk haben wir elastische Körper mit grofsem H und einem dagegen verschwindend kleinen K, für sie mufs also θ eine sehr grofse Zahl sein; sie fügen sich daher nicht im Entferntesten den Vorbedingungen der Poisson'schen Theorie.

Das entgegengesetzte Extrem, eine elastische Substanz mit verschwindend kleinem Widerstand gegen Volumänderungen und starkem Widerstand gegen Scheerungen ist nicht bekannt; ihre Vorstellung ist nur deswegen von Interesse, weil Lord Kelvin einmal die hypothetische Natur des Lichtäthers in dieser Weise als mögliche Grundlage für die elastische Lichttheorie charakterisirt hat. In der That kann so, wenn man nur für K einen horrend grofsen Werth zuläfst, die Fähigkeit dieses Aethers, nur transversale Wellen mit der bekannten Lichtgeschwindigkeit fortzupflanzen, erklärt werden. Lord Kelvin vergleicht die Eigenschaften dieses Aethers, um ein anschauliches Bild zu schaffen, mit denen des Seifenschaumes. Dieser ist aber kein homogener Körper, er besteht aus vielen abgeschlossenen Lufträumen, welche getrennt sind durch sehr dünne Membranen von Seifenwasser. Die Beständigkeit dieses Gebildes ist bedingt durch ein relatives Minimum potentieller Energie, welche sich zusammensetzt aus der elastischen Energie der eingeschlossenen Luftmasse und aus der capillaren Energie der Flüssigkeitshäutchen. Erstere nimmt ab, wenn die Luft ihr Volumen vergröfsert, dabei werden aber alle Zellwände gedehnt, die capillare Energie also vermehrt. Wenn die entgegengesetzten Aenderungen beider Energieformen sich gegenseitig aufheben, ist die Summe ein Minimum. Wir haben hier ein Gleichgewicht zwischen dem Expansionsbedürfnifs der eingesperrten Luft und dem Contractionsbedürfnifs der Seifenwassermembranen. Vergröfsert man also das

Volumen einer zusammengeballten Schaumflocke, so mufs man gegen die Capillarkräfte arbeiten, die Luftfüllung hilft uns aber dabei, und da ihr Druck jenen Capillarkräften in der Ruhe das Gleichgewicht hält, so übernimmt sie selbst den gröfsten Theil dieser Arbeit, so dafs von aufsen nur ein verschwindender Antheil zu leisten ist, Will man umgekehrt die Schaumflocke comprimiren, so mufs man gegen den Druck der eingeschlossenen Luft arbeiten, diesmal helfen uns aber die Membranen und übernehmen den gröfsten Theil der Arbeit, während sie sich zusammenziehen. Der Widerstand gegen Volumveränderung ist also nach beiden Seiten hin sehr gering, jedenfalls viel geringer als der Widerstand eines reinen Luftraumes gegen Compression. Dagegen besitzt der Schaum eine gewisse Steifigkeit. Will man die Flocke durch reine Schiebung der Schichten deformiren, so bleibt dabei das Volumen ungeändert, die eingeschlossene Luft verhält sich also dabei indifferent, jedenfalls hilft sie uns nicht bei der Arbeit, die wir durch die Zerrung der Häutchen gegen die Capillarkräfte leisten müssen. Deshalb ist beim Seifenschaum der Widerstand gegen Scheerung, wenn auch nicht absolut grofs, so doch aufserordentlich viel gröfser als der gegen Volumveränderung; wir haben hier ein Gebilde vor uns, welches sich verhält ähnlich einem elastischen Körper, bei dem das Verhältnifs $H:K$ ein kleiner Bruch nahezu Null ist, mithin θ nahezu gleich $-\,^1/_3$.

Ein dem Schaum durch seine organische Bauart einigermafsen verwandter Stoff ist der Kork. Auch er besteht aus sehr feinen lufthaltigen Zellen, nur sind deren Wandungen nicht Flüssigkeitsmembranen, aber doch sehr weiche widerstandslose Häute. Beim Kork ist auch der Widerstand wenigstens gegen Compression kleiner als der gegen Scheerung. Der Widerstand gegen Volumdehnung scheint bedeutender. Das liegt wohl daran, dafs die Zellwände sich beim Zusammendrücken ziemlich leicht falten und knicken lassen, während sie bei der Scheerung zur Hälfte, und bei der Dehnung sämmtlich gespannt werden müssen.

Für exacte Messungen sind übrigens alle diese weichen Körper wenig geeignet, weil ihre schwache Elastizität zum Theil verdeckt wird durch andere Erscheinungen, die sich bei den sehr festen nicht in so störender Weise geltend machen. Die innere Reibung, die wir schon erwähnt haben, die elastische Nachwirkung, d. i. die Eigenschaft der meisten Körper, Deformationen nicht sofort nach Aufhören des Zwanges, sondern erst nach längerer Zeit gänzlich zu verlieren, endlich die Plasticität, das dauernde Fortbestehen der

Formveränderungen ohne äufseren Zwang sind die wichtigsten dieser Störungen, welche sich selbst bei festen Materialien mitunter geltend machen, und bei empfindlichen Beobachtungen stets im Auge behalten werden müssen.

§ 33. Die elastischen Kräfte in isotropen Körpern dargestellt durch die Deformationen.

Um aus der potentiellen Energie einen Schlufs auf die Kräfte zu ziehen, mufs man deren Variation bei einer virtuellen Verrückung bilden, und weil bei der Bildung von $\delta\varphi$ zunächst die Differentialquotienten der $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ heraustreten, mufs man $\int\int\int\delta\varphi\cdot d\tau$ durch partielle Integration umformen.

Wir brauchen nun diese ganze Rechnung an der jetzt gefundenen bestimmten Form φ nicht nochmal durchzuführen, da wir sie in §§ 21 bis 23, ohne auf eine bestimmte Gestalt einzugehen, ganz allgemein geführt haben, sondern können direct die Resultate anwenden.

Wir sahen dort, dafs alle elastischen Kraftäufserungen sich zurückführen und ausdrücken liefsen durch die 9 Flächenkräfte X_x, X_y, $\cdots$ Z_z, deren Werthe durch die negativen Differentialquotienten der Function φ nach den 6 Deformationsdaten a, b, c, $2l$, $2m$, $2n$ angegeben werden. Wählen wir z. B. die Kirchhoff-sche Normalform für φ in der Schreibweise der Gleichung (60a)

$$\varphi = K\left\{(a^2+b^2+c^2)+2(l^2+m^2+n^2)\right\}+K\theta(a+b+c)^2,$$

so findet man daraus:

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial a} = -2Ka-2K\theta(a+b+c) = -2K\frac{\partial\xi}{\partial x}-2K\theta\omega\\
Y_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial b} = -2Kb-2K\theta(a+b+c) = -2K\frac{\partial\eta}{\partial y}-2K\theta\omega\\
Z_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial c} = -2Kc-2K\theta(a+b+c) = -2K\frac{\partial\zeta}{\partial z}-2K\theta\omega.
\end{aligned}\right\}\quad(65)$$

$$\left.\begin{aligned}
Y_z = Z_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial 2l} = -2Kl = -K\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\\
Z_x = X_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial 2m} = -2Km = -K\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\\
X_y = Y_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial 2n} = -2Kn = -K\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(65\,a)$$

Aus der Helmholtzschen Normalform (62a)

$$\varphi = \tfrac{1}{2} H \cdot (a+b+c)^2 + \tfrac{1}{3} K \left\{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 + 6(l^2+m^2+n^2)\right\}$$

ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -H(a+b+c) - 2K\frac{2a-b-c}{3} \\ Y_y &= -H(a+b+c) - 2K\frac{2b-c-a}{3} \\ Z_z &= -H(a+b+c) - 2K\frac{2c-a-b}{3} \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_z &= Z_y = -2Kl \\ Z_x &= X_z = -2Km \\ X_y &= Y_x = -2Kn. \end{aligned}\right\} \tag{66a}$$

Werfen wir jetzt einen Blick auf die Gleichungen (20) und (20a), S. 41, so erkennen wir dort dieselben Bildungen, welche auch hier auftreten. Dort wurde eine allgemeine Deformation a bis n zerlegt in eine reine Volumdehnung mit den Daten:

$$a_1 = b_1 = c_1 = \frac{a+b+c}{3}, \quad l_1 = m_1 = n_1 = 0 \tag{20}$$

und eine reine Gestaltänderung mit den Daten

$$\left.\begin{gathered} a_2 = \frac{2a-b-c}{3}, \quad b_2 = \frac{2b-c-a}{3}, \quad c_2 = \frac{2c-a-b}{3}, \\ l_2 = l, \; m_2 = m, \; n_2 = n. \end{gathered}\right\} \tag{20a}$$

Unter Benützung dieser kurzen Zeichen kann man den Formeln folgende sehr durchsichtige Gestalt geben:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -3Ha_1 - 2Ka_2, & Y_z &= Z_y = -3Hl_1 - 2Kl_2 \\ Y_y &= -3Hb_1 - 2Kb_2, & Z_x &= X_z = -3Hm_1 - 2Km_2 \\ Z_z &= -3Hc_1 - 2Kc_2, & X_y &= Y_x = -3Hn_1 - 2Kn_2. \end{aligned}\right\} \tag{66b}$$

Aus dieser Darstellung kann man ohne weitere Rechnung den Beweis für die am Schlufs von § 25 aufgestellte Behauptung finden, dafs in isotropen Körpern die Hauptaxen des Strain und des Stress zusammenfallen. Wenn man nämlich aus einem Strain die gleichmäfsige Volumdehnung wegnimmt, so bleiben dessen Hauptaxen dabei ungeändert, diese sind nur bedingt durch a_2 bis n_2; und wenn man aus einem Stress den nach allen Richtungen gleichmäfsigen Druck wegnimmt, so bleiben auch dessen Hauptaxen dabei ungeändert. In den Gleichungen (66b) bilden nun die Glieder mit dem Factor $-3H$ den gesammten darin steckenden gleichmäfsigen Druck. Die Hauptaxen des Stress sind nur bedingt durch die 6 Daten $-2Ka_2$ bis $-2Kn_2$. Da diese sich nur durch den gemeinsamen Factor $-2K$ von denen unterscheiden, welche die Hauptaxen des Strain bedingen, so müssen die Richtungen beider übereinstimmen. Die Hinzufügung eines gemeinsamen Factors zu den Straindaten kann nämlich die Richtungswinkel nicht verändern, wie ein Blick auf die homogenen Gleichungen (13a) lehrt: Die Gröfse σ, welche sich jetzt nur auf eine reine Gestaltänderung bezieht, geht dabei auch in $-2K\sigma$ über, so dafs sich $-2K$ dort weghebt. Das negative Vorzeichen aller Glieder auf der rechten Seite von (66b) kann nicht überraschen, denn ein positives X_x bedeutet positiven Druck, Compression in der x-Richtung, während ein positives $a = \partial \xi / \partial x$ eine Dehnung in dieser Richtung anzeigt. Aehnlich läfst sich auch leicht beleuchten, dafs positive Schubkräfte Y_z und Z_y eine Scheerung bewirken, bei welcher l negativ wird und umgekehrt. Gewarnt sei schliefslich vor dem Irrthum, dafs die Werthe der 3 Hauptdrucke proportional sein sollten den 3 Haupt-Dilatationen. Das ist nicht richtig: Man kann den Zusammenhang beider Hauptdaten leicht aus den Gleichungen (66) finden, wenn man das Coordinatensystem so legt, dafs dessen x-, y-, z-Axen der Reihe nach zusammen fallen mit den Hauptaxen vom Index 1, 2, 3. Dann wird nämlich

$$a = \sigma_1\,, \quad b = \sigma_2\,, \quad c = \sigma_3\,, \quad l = m = n = 0$$

$$X_x = R_{n_1}\,, \quad Y_y = R_{n_2}\,, \quad Z_z = R_{n_3}\,, \quad Y_z = Z_x = X_y = 0\,.$$

Die Hauptdrucke hängen also von den Hauptdilatationen ab durch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} R_{n_1} &= -H\omega - \tfrac{2}{3}K\{(\sigma_1 - \sigma_2) - (\sigma_3 - \sigma_1)\} \\ R_{n_2} &= -H\omega - \tfrac{2}{3}K\{(\sigma_2 - \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_2)\} \\ R_{n_3} &= -H\omega - \tfrac{2}{3}K\{(\sigma_3 - \sigma_1) - (\sigma_2 - \sigma_3)\}. \end{aligned}\right\} \quad (66\text{c})$$

Nun kann man nach den Gleichungen (40) die von aufsen die Masse angreifenden Fernkräfte, welche zur ruhenden Erhaltung der Deformation nöthig sind, ebenfalls durch die Verrückungen selbst ausdrücken. Benützen wir zuerst die üblichen Formen (65) und (65a). Es kommt

$$\mu X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

$$= -2K\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2K\theta\frac{\partial \omega}{\partial x} - K\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) - K\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z}\right).$$

Hier kann man zusammenfassen die Hälfte des ersten Gliedes mit der zweiten Hälfte des dritten und der ersten Hälfte des vierten Gliedes zu $-K\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right)$, wofür man kürzer $-K \cdot \Delta \xi$ schreibt. Die anderen Hälften derselben drei Glieder enthalten alle eine Differentiation nach x, welche man vor die Klammer setzen kann, so dafs diese drei Glieder geben: $-K \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)$, d. h. $-K \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$, was sich dann mit dem zweiten Term vereinigt; so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
\mu X &= -K \cdot \Delta \xi - K(1 + 2\theta) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \\
\mu Y &= -K \cdot \Delta \eta - K(1 + 2\theta) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \\
\mu Z &= -K \cdot \Delta \zeta - K(1 + 2\theta) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Da diese äufseren Kräfte den inneren das Gleichgewicht halten sollen, so müssen die Beschleunigungscomponenten, welche die Masse in Folge ihrer eigenen Deformation antreiben, und welche auch sofort in Action treten, wenn man plötzlich die äufseren Kräfte wegnimmt, den X, Y, Z entgegengesetzt gleich sein. Bezeichnen wir diese mit X', Y', Z', so ist also:

$$\left.\begin{aligned}
X' &= +\frac{K}{\mu}\Delta \xi + \frac{K}{\mu}(1 + 2\theta)\frac{\partial \omega}{\partial x} \\
Y' &= +\frac{K}{\mu}\Delta \eta + \frac{K}{\mu}(1 + 2\theta)\frac{\partial \omega}{\partial y} \\
Z' &= +\frac{K}{\mu}\Delta \zeta + \frac{K}{\mu}(1 + 2\theta)\frac{\partial \omega}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{67 a}$$

Diese inneren Beschleunigungscomponenten sind immer in Wirksamkeit zu denken und machen sich bei einer Störung des Gleichgewichtes sofort bemerklich. Bei Bewegungen in elastischen Substanzen sind die Verrückungscomponenten ξ, η, ζ der Massenpunkte mit der Zeit veränderlich, die effectiven Beschleunigungscomponenten sind $d^2\xi/dt^2$, $d^2\eta/dt^2$ und $d^2\zeta/dt^2$. Diese setzen sich zusammen als algebraische Summen aller von aufsen und von innen wirkenden Antriebe. Nehmen wir äufsere Fernkräfte an, welche die Beschleunigung X, Y, Z hervorrufen, welche aber jetzt im Allgemeinen nicht mehr die zur ruhenden Deformation erforderlichen Werthe besitzen, so setzt sich die effective Beschleunigung zusammen in der Weise: $\frac{d^2\xi}{dt^2} = X + X'$ etc., also ausgeschrieben:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= X + \frac{K}{\mu}\Delta\xi + \frac{K}{\mu}(1+2\theta)\frac{\partial\omega}{\partial x}\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= Y + \frac{K}{\mu}\Delta\eta + \frac{K}{\mu}(1+2\theta)\frac{\partial\omega}{\partial y}\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= Z + \frac{K}{\mu}\Delta\zeta + \frac{K}{\mu}(1+2\theta)\frac{\partial\omega}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Dies sind die Differentialgleichungen der Bewegungen im Inneren eines elastischen Körpers. Für den besonderen Fall der Ruhe hat man die linken Seiten gleich Null zu setzen und kommt dadurch wieder zurück auf die Gleichungen (67), welche die zur Erhaltung der Ruhe erforderlichen äufseren Kräfte angiebt.

Die zur Ruhe nöthigen äufseren Flächenkräfte, welche die Oberfläche des Körpers angreifen müssen, findet man nach (40a), wenn man dort rechts für die X_x etc. die Werthe aus (65) und (65a) einsetzt; eine weitere Umformung der dadurch entstehenden Ausdrücke für X_n, Y_n, Z_n ist dabei zunächst nicht zu machen, darum wollen wir diese leicht zu bildenden Formeln hier nicht angeben. Diese inneren Flächenkräfte, mit welchen der elastische Körper vermöge seiner Deformation auf die ihn an der Oberfläche umhüllenden angrenzenden Körper einwirkt, müssen natürlicherweise den äufseren entgegengesetzt gleich sein. Wir werden sie am besten dadurch bezeichnen, dafs wir die nach aufsen gerichtete Normale mit $-n$ bezeichnen, und demgemäfs X_{-n} statt X_n' schreiben:

$$0 = X_n + X_{-n}, \quad 0 = Y_n + Y_{-n}, \quad 0 = Z_n + Z_{-n}. \tag{69}$$

Diese Gleichungen müssen auch unverändert gelten, wo es sich um Bewegungen handelt, denn eine Beschleunigung $d^2\xi/dt^2$ der Oberfläche aus der Nichterfüllung herzuleiten, hat deshalb keinen Sinn, weil die Flächenelemente als solche keine träge Masse besitzen.

Um die den Gleichungen (67), (67 a) und (68) entsprechenden Ausdrücke in der anderen Fassung anzugeben, braucht man nicht von neuem deren Ableitung durchzuführen, vielmehr kann man mittels der Gleichung (64 a) das KIRCHHOFF'sche θ durch H ersetzen. Es ergiebt sich: $1 + 2\,\theta = \frac{H}{K} + \frac{1}{3}$ also $\frac{K}{\mu}(1 + 2\,\theta) = \frac{H}{\mu} + \frac{1}{3}\frac{K}{\mu}$. Setzt man dies beispielsweise in die Gleichungen (67 a) ein und trennt dann die Glieder nach den Factoren H und K, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} X' &= \frac{H}{\mu}\cdot\frac{\partial\,\omega}{\partial\,x} + \frac{K}{\mu}\left(\Delta\,\xi + \frac{1}{3}\frac{\partial\,\omega}{\partial\,x}\right) \\ Y' &= \frac{H}{\mu}\,\frac{\partial\,\omega}{\partial\,y} + \frac{K}{\mu}\left(\Delta\,\eta + \frac{1}{3}\frac{\partial\,\omega}{\partial\,y}\right) \\ Z' &= \frac{H}{\mu}\,\frac{\partial\,\omega}{\partial\,z} + \frac{K}{\mu}\left(\Delta\,\zeta + \frac{1}{3}\frac{\partial\,\omega}{\partial\,z}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

Die entsprechende Umformung der Bewegungsgleichungen (68) geschieht auf gleiche Weise. Man erkennt übrigens bei vergleichender Betrachtung, dafs für praktische Benutzung der Formeln an festen Körpern diejenigen mit dem KIRCHHOFF'schen θ wohl den Vorzug der Kürze besitzen vor denen, welche nach H und K getheilt sind; ein Unterschied in der Bedeutung besteht überhaupt nicht, man kann an jeder Stelle einer Rechnung mit Hülfe der Gleichungen (64 und 64 a) von dem einen System zum anderen überspringen.

Schliefslich sei noch hingewiesen auf die Veränderung, welche die vorstehenden Formeln erfahren müssen, wenn man genöthigt ist, in φ ein lineares Glied hinzuzusetzen. Dieses können wir entsprechend Gleichung (63 a) schreiben:

$$- p \cdot (a + b + c).$$

Dadurch erhalten wir in den Ausdrücken, welche auf $-\partial\varphi/\partial a$, $-\partial\varphi/\partial b$, $-\partial\varphi/\partial c$ zurückgehen, das sind also X_x, Y_y, Z_z in den Gleichungen (65), (66 und 66 a), den hinzutretenden Addenden p, welcher den in der Ruhelage überall gleichmäfsigen Druck misst. Dieser superponirt sich ungestört den normalen Druck- oder Zugkräften. Dagegen verschwindet dieser Zusatz, wie jeder, der von einem in a, b, c, l, m, n linearen Glied von φ herrühren könnte, wieder in den Ausdrücken für die äufseren und inneren Massenbeschleunigungen, weil bei der nochmaligen Differentiation nach den Coordinaten dieses räumlich constante p, oder wie sonst die Coefficienten linearer Glieder bezeichnet sein mögen, C_a, C_b, ... C_n, wegfallen. Diese mathematische Erscheinung hat den physikalischen Sinn, dafs der unveränderliche äufsere Zwang, z. B. der Atmosphärendruck, aber auch verborgene Spannungen, keinen Einflufs haben auf die Bewegungen, welche sich unter der Wirkung elastischer Kräfte äufsern. Ein Einflufs wird höchstens dadurch möglich sein, dafs diese unveränderlichen Kräfte so stark sind, dafs sie die elastischen Constanten, also die Natur des Materiales zu alteriren vermögen: Einen solchen Fall haben wir z. B. in den gespannten Saiten zu erblicken.

§ 34. Dimensionen und Gröfsenordnungen.

Wir sind nun mit der Fundamentirung der Elasticitätstheorie fertig. Am Schlusse scheint es gerathen, die im Laufe der Betrachtungen eingeführten physikalischen Gröfsen auf ihre Dimensionen zu prüfen. Zuerst erinnern wir daran, dafs alle Angaben, welche den Strain charakterisiren, kleine unbenannte Brüche sind, deren höhere Potenzen und Producte meistens weggelassen werden können. Zu diesen kleinen Zahlen gehören alle Differentialquotienten der Verrückungen nach den Coordinatrichtungen und Zusammenstellungen von solchen, also die mit fester Bedeutung gebrauchten Buchstaben:

a, b, c, l, m, n, λ, μ, ν, σ_1, σ_2, σ_3, ω, ϑ (Scheerungswinkel).

In der Dynamik trat uns zuerst die Function φ entgegen, welche nach Zusatz des Factors $d\tau$ den im Volumelement enthaltenen Inhalt an potentieller Energie bezeichnet. Ihre Dimension ist also

$$\varphi = \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}}.$$

Die Dimension der Energie ist in der üblichen Bezeichnung, wo Masse durch M, Länge durch L, Zeit durch T gegeben wird: $[ML^2T^{-2}]$, die des Volumens $[L^3]$, also wird:

$$\varphi = [ML^{-1}T^{-2}]. \tag{71}$$

Die Massenkräfte hatten wir durch die Componenten der Beschleunigung ausgedrückt, welche erst nach Multiplication mit dem Massenelement $\mu\, d\tau$ mechanische Kräfte bezeichnen. Die Gröfsen X, Y, Z ohne unteren Index und auch die inneren Reactionen dagegen, die in Gleichungen (67a) gegebenen X', Y', Z' haben die Dimension der Beschleunigung:

$$X = [L\,T^{-2}]. \tag{71a}$$

Die räumliche Dichtigkeit der Masse hat die Dimension:

$$\mu = [M L^{-3}]. \tag{71b}$$

Die öfters vorkommende Verbindung: $\mu X = [M L^{-2} T^{-2}]$ mifst Kraft durch Volumen. Die für unsere Theorie charakteristischen Flächenkräfte waren eingeführt worden durch die Componenten $X_n\,ds$, $Y_n\,ds$, $Z_n\,ds$. Daher ist

$$X_n = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \left[\frac{M L T^{-2}}{L^2}\right] = \left[M L^{-1} T^{-2}\right]. \tag{71c}$$

Von dieser Dimension ist überhaupt jede den Stress charakterisirende Angabe, namentlich also die dazu ausreichenden Zeichen

$$X_x,\ X_y,\ \ldots \text{ bis } Z_z.$$

Diese Dimension ist übrigens identisch mit der von φ, denn es ist

$$\frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \left[M L^{-1} T^{-2}\right],$$

aber φ ist eine ungerichtete Gröfse, während die Flächenkräfte sich auf bestimmte Richtungen beziehen. Endlich besitzen diese selbe Dimension sämmtliche Elasticitätscoefficienten, denn aus diesen entstehen durch Zusatz der unbenannten Strainzahlen als Factoren sowohl die Stressdaten wie auch die Function φ. Das Gleiche gilt auch von den Coefficienten der hie und da zu φ tretenden linearen Glieder. Also alle folgenden Zeichen: die 21 Gröfsen C_{aa} bis C_{nn}, die 6 Gröfsen C_a bis C_n, C_ω, p, A, B, C, K, $K\theta$, H, haben diese Dimension. Mifst man alle Gröfsen in demselben System von Einheiten, z. B. in dem C.G.S.-System (cm, gr, sec), so läfst sich über die Mafszahlen einiges Allgemeines sagen. Da aus den Elasticitätscoefficienten die Gröfsen von Druck, Zug, Schub durch Zusatz der kleinen Zahlen in erster Potenz gefunden werden, während φ durch Zusatz der zweiten Potenzen entsteht, so müssen die Mafszahlen der Elasticitätsmoduln sehr grofs im Verhältnifs zu denen der Druck-, Zug- und Schubkräfte, diese aber wiederum sehr grofs gegen die Mafszahl der Energiedichte sein. Wie weit man Deformationen treiben darf, läfst sich nicht allgemein angeben, doch sind wohl solche, bei denen die Straindaten die Gröfsenordnung $^1/_{1000}$ erreichen, schon sehr grofs. (Von Kautschuk und ähnlichen Stoffen sehen wir hier ab.) Nun haben Messungen ergeben, dafs bei den gut elastischen festen Körpern die beiden Moduln H und K von der Grössenordnung 10^{11} im C.G.S.-System sind. Eine Deformation von der Grösse 10^{-3} würde also normale oder tangentiale Druckkräfte von der Ordnung 10^8 hervorrufen und eine Energiedichte von 10^5. Ein anschauliches Maß für Druckkräfte ist der Atmosphärendruck, welcher ein Kilogrammgewicht auf jeden Quadratcentimeter beträgt, das giebt im C.G.S.-System recht genau 10^6. Es würde sich daher bei solchen Deformationen um Hunderte von Atmosphären handeln. Der Arbeitswerth, welcher in jedem Cubikcentimeter steckt (das ist die Bedeutung von φ), beträgt dann etwa $^1/_{10}$ Megaerg. Diese Arbeit würde ausreichen, um ein Grammgewicht ungefähr um einen Meter zu heben.

Dritter Theil.

Anwendungen auf das elastische Gleichgewicht deformirter isotroper Körper. Die Deformationen sind vorgeschrieben, die Kräfte werden gesucht.

---

§ 35. Einleitung.

Die im vorhergehenden Theile entwickelten gesetzmäſsigen Beziehungen zwischen Verrückungen und Kräften in elastischen Körpern sollen jetzt zur Lösung besonderer Aufgaben angewendet werden. Wir suchen zunächst immer Gleichgewichtsbedingungen für bestimmte Deformationen in bestimmten Körpern und wollen uns dabei auf isotrope Körper beschränken, welche das einfachste Verhalten zeigen, und welche auch zum Zweck exacter Beobachtungen immer sorgfältig ausgewählt zu werden pflegen, wo es sich nicht gerade um die besonderen Eigenschaften der Krystalle handelt. In der gröberen Praxis freilich werden die für isotrope Körper nachgewiesenen Gesetze vielfach ohne Weiteres übertragen auch auf anisotrope Körper wie Holz, Stabeisen, gezogene Drähte, gewalzte Bleche u. s. w.; dies kann man auch unbedenklich thun, so lange man solche faserigen oder blätterigen Structuren nur in ein und derselben Richtung deformirt, also nicht etwa ein Stück Langholz mit einem Stück Querholz vergleichen will. Wo es sich indessen um genaue Angaben handelt, sind die Folgerungen unserer Theorie beschränkt auf isotropes Material, aus dessen Annahme sie gewonnen wurden.

Es lassen sich nun die statischen Aufgaben oder die Fragen nach dem elastischen Gleichgewicht in zwei entgegengesetzte Klassen scheiden. Erstens kann man in einem gegebenen Körper die Verrückungen vorschreiben und die Aufgabe stellen: Es sollen diejenigen äuſseren Einflüsse, Fernkräfte auf die Masse und Flächenkräfte auf die Begrenzung gesucht werden, welche nöthig sind, um den Körper in der vorgeschriebenen Deformation zu erhalten. Zweitens aber kann man die äufseren Kräfte vorschreiben, und die Frage stellen: Welche Verrückungen werden dadurch in dem gegebenen Körper erzeugt, sobald er zur Ruhe gekommen ist. Die erste Klasse von Aufgaben ist leichter zu behandeln, denn ihre Lösungen sind bereits in den allgemeinen Gleichungen des vorigen Theiles fertig enthalten und brauchen nur auf bestimmte Einzelfälle angewendet zu werden. Die Aufgaben der zweiten Klasse liegen zwar in ihrer Fragestellung unserer Anschauungsform (Causalität) näher, denn wir halten die äufseren Einwirkungen für die gegebene Ursache der Deformationen, aber die Lösung ist eine viel verwickeltere. Sie erfordert, soweit man sich nicht etwa dabei die Resultate der ersten Klasse zu Nutze machen kann, immer die Integration der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Verrückungen unter Berücksichtigung der jeweiligen Grenzbedingungen an der Oberfläche. Diese Probleme sind nur für gewisse einfache Fälle gelöst worden.

Die gemeinsame Grundlage für beide Klassen von Aufgaben finden sich im vorigen Theile in den nämlichen allgemeinen Gleichungen. Erstens sind dies die für isotrope Structuren geltenden 6 Beziehungen zwischen Strain und Stress, welche entweder in der Form der Gleichungen (65) und (65a) oder der damit gleichbedeutenden (66) und (66a) angewendet werden können. Zweitens sind es die 6 Gleichungen (40) und (40a), deren erstere drei die äufseren Massenkräfte, letztere drei die Oberflächenkräfte mit den Localwerthen des Stress oder dessen Differentialquotienten in Verbindung bringen. Der Weg zur Lösung der Aufgaben der ersten Klasse ist nun folgender: Man berechnet zuerst aus den vorgeschriebenen Verrückungen mit Hülfe der Gleichungen (10a′) (S. 21) die Straindaten $a\,b\,c\,l\,m\,n$, aus diesen dann mit Hülfe von (65) und (65a) die Stressdaten $X_x\,Y_y\,Z_z\,Y_z\,Z_x\,X_y$, und aus diesen endlich mit Hülfe von (40) und (40a) die äufseren Kräfte. Man kann auch die drei Schritte der Rechnung zusammenziehen, nachdem man sich allgemeine Formeln aus den voranstehenden gebildet hat, welche direct die äufseren Kräfte in Verbindung bringen mit den Componenten der Verrückungen. Für die Massenkräfte haben wir diese Formeln angegeben in den Gleichungen (67) oder (70), für die Oberflächenkräfte liefsen sie sich leicht bilden. Der Weg zur Lösung der Aufgaben der zweiten Klasse ist der umgekehrte. Man setzt die vorgeschriebenen Kraftwerthe in die linken Seiten von (40) und (40a). Die Gleichungen (40) bedeuten dann Differentialgleichungen für die Stressdaten, welche integrirt werden müssen; die Gleichungen (40a) spielen dabei die Rolle von vorgeschriebenen Grenzbedingungen.

Sodann mufs man aus den gefundenen Integralen mittels (65) und (65a) die Straindaten berechnen. Wird nach den Verrückungscomponenten gefragt, so hat man eine abermalige Integration auszuführen. Auch diese beiden Integrationen kann man zu einer Aufgabe zusammenfassen, wenn man sich der fertigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Verrückungen, also (67) oder (70) bedient, was namentlich da von Vortheil ist, wo sich die Grenzbedingungen leicht als Vorschriften für ξ, η, ζ ausdrücken lassen.

Für beide Klassen von Aufgaben sei auf einen wichtigen Umstand hingewiesen, welcher es erlaubt, aus gefundenen einfachen Lösungen solche zusammenzusetzen, welche complicirteren Bedingungen entsprechen. Nämlich sämmtliche 12 Grundgleichungen sind linear, d. h. sie enthalten nur die ersten Potenzen der durch sie in Verbindung gebrachten Coordinatenfunctionen. Hat man also zwei verschiedene Aufgaben gelöst und setzt man die dafür gefundenen Werthe in die Gleichungen ein, so liefert die Addition der entsprechenden Gleichungspaare immer wieder ein Gleichungssystem von der nämlichen Gestalt. Man hat also die Lösung einer complicirteren Aufgabe gefunden in welcher sowohl die äufseren Kräfte wie auch Stress, Strain und Verrückungscomponenten sich als die Summen der für die beiden einfacheren Aufgaben gültigen Werthe herausstellen. Das Gleiche gilt natürlich auch, wenn man vor der Addition jedes Gleichungssystem noch mit je einem Zahlenfactor erweitert, oder wenn man mehr als zwei elastische Gleichgewichtszustände superponirt. Zu beachten ist dabei nur, dafs die durch Addition gefundene Gesammtdeformation nicht stärker sein darf, als bei der Aufstellung der Grundgleichungen als zulässig angenommen werden mufste.

Wir beginnen nun mit einer Reihe typischer Aufgaben der ersten Klasse.

§ 36. Gleichförmige Deformationen. Vernachlässigung der Wirkung der Schwerkraft.

Eine Deformation nennen wir durch einen ausgedehnten Körper hindurch gleichförmig, wenn die $abclmn$ räumlich constant und die Drehungen $\lambda\,\mu\,\nu$ gleich Null sind. Die Verrückungscomponenten sind dann lineare Functionen in Bezug auf jedes im Raume oder im Körper festgelegte Coordinatensystem. In letzterem Falle werden sie im ganzen Körper dargestellt durch Gleichungen (12) auf S. 26.

Der ganze Körper, so ausgedehnt er sein mag, bildet dann einen sogenannten „kleinen" Bereich im Sinne des § 5 (S. 11). Die ersten Differentialquotienten der Verrückungen werden constant, folglich alle zweiten Differentialquotienten gleich Null. Auch die Volumveränderung ω wird constant, mithin auch deren Differentialquotienten gleich Null. Die Gleichförmigkeit der Deformation fordert also im Besonderen

$$\varDelta\,\xi = \varDelta\,\eta = \varDelta\,\zeta = \frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial z} = 0. \tag{72}$$

Die gleiche Eigenschaft besitzen übrigens auch gewisse ungleichförmige Deformationen, die mit Drehungen der Theilchen verbunden sind. (Siehe Torsion!)

Durch diese Forderungen ist das gliedweise Verschwinden der rechten Seiten der drei Kraftgleichungen (67) ausgesprochen. Soll also in einem ausgedehnten Körper eine gleichförmige Deformation herrschen, so dürfen keine äufseren Fernkräfte auf die Masse wirken. Zu derselben Erkenntnifs gelangt man auch durch Betrachtung der Gleichungen (40). Soll nämlich der Strain räumlich constant sein, so mufs bei jeder homogenen Substanz der Stress es ebenfalls sein, die Differentialquotienten der $X_x\, X_y \ldots$ müssen sämmtlich Null sein, folglich auch die linken Seiten μX, μY, μZ. Diese Schlufsfolgerung darf man nicht umdrehen. Es ist keineswegs nothwendig, dafs jede Deformation, welche ohne Fernkräfte bestehen kann, deshalb gleichförmig sein mufs, denn es können sich sehr wohl die rechten Seiten der Gleichungen (40) oder (67) gleich Null herausstellen, ohne dafs die einzelnen Terme gliedweise verschwinden. Es können sich z. B. in der letzten der Gleichungen (67) die beiden Glieder $-K\cdot\varDelta\,\zeta$ und $-K(1+2\,\theta)\dfrac{\partial\omega}{\partial z}$ überall gegenseitig aufheben. (Später, bei einem besonderen Falle der Biegung, werden wir dieser Erscheinung begegnen.) Die richtige Umkehrung des gefundenen Satzes kann nur lauten: Sobald Fernkräfte auf die Masse des elastischen Körpers wirken, kann dessen Deformation unter keinen Bedingungen eine gleichförmige sein.

Da nun der wichtigste Repräsentant dieser Massenkräfte, die Schwerkraft, überall auf der Erde wirksam ist, so folgt, dafs unter irdischen Verhältnissen streng genommen eine vollkommen gleichförmige Deformation eines ausgedehnten Massenbereiches gar nicht hergestellt werden kann. Wir haben aber bereits am Beginn dieses Bandes in § 5 gezeigt, dafs man einen beliebig deformirten Körper sich immer zerlegt denken kann in sogenante „kleine“ Bereiche, innerhalb deren die Deformation als gleichförmig angesehen werden darf, und wir haben damals auch schon hervorgehoben, dafs es dabei wesentlich auf die Art der Deformation und die verlangte Genauigkeit der Angaben ankommt, wie eng man diese kleinen Bereiche umgrenzen mufs. Je stärker die Massenkräfte sind, um so gröfser müssen einige der zweiten Differentialquotienten der Verrückungen sein, um so merklicher mufs also der Charakter der Deformation von Ort zu Ort wechseln, um so enger müssen daher bei gleicher Genauigkeit der Angaben die kleinen Bereiche umgrenzt werden. Im entgegengesetzten Falle, wenn die Massenkräfte verhältnifsmäfsig sehr schwach sind gegenüber den auf die Oberfläche des Körpers ausgeübten Druck-, Zug- oder Schubkräften, und wenn letztere derart vertheilt sind, dafs sie allein dem gesammten Körper eine gleichförmige Deformation ertheilen würden, dann kann man solch einen „kleinen“ Bereich über einen weiten Raum oft über den ganzen Körper ausdehnen, ohne dafs die Ungleichförmigkeit bei der verlangten Genauigkeit spürbar wird. In dieser bequemen Lage befindet man sich häufig gegenüber der Schwerkraft. Die deformirende Wirkung des eigenen Gewichtes ist bei wirklich festen Körpern von mäfsiger Ausdehnung vollkommen verschwindend; das Zusammensinken, welches man z. B. bei Gallerte deutlich wahrnimmt und welches auf Schiebungen der Schichten beruht, spielt bei festen Körpern gar keine Rolle; auch die Abnahme der Volumcompression, die man bei Luft schon in mäfsigen verticalen Distanzen nachweisen kann, ist bei festen Körpern verschwindend. Deshalb darf man die festen elastischen Körper, wenn sie durch eine Unterlage oder eine Aufhängung am Fallen verhindert sind, häufig so betrachten, wie wenn sie der Wirkung der Schwere entzogen wären. Charakteristische Erscheinungen bleiben freilich übrig, in denen gerade die Deformation durch das Eigengewicht eine besonders wichtige Rolle spielt, z. B. die Durchbiegung horizontal liegender Balken, welche nur an den Enden oder nur in der Mitte unterstützt sind. Überhaupt bei allen Körperformen, deren Ausdehnungen in einer oder zwei Richtungen sehr gering gegen die übrig bleibenden Richtungen ist (lange Stäbe, dünne Platten), wird die deformirende Wirkung des Eigengewichtes am meisten spürbar und zwar um so stärker, je gröfser bei geometrisch-ähnlicher Gestalt die Dimensionen der Körper sind. Denn bei einer gleichmäfsigen Vergröfserung aller linearen Abmessungen wächst das Volumen und damit auch das Gewicht wie die dritte Potenz der Vergröfserungszahl, die Flächen aber und mit ihnen die elastische Festigkeit wachsen nur wie das Quadrat der Vergrößerungszahl.

§ 37. Gleichförmige reine Volumveränderung.

Ein homogener isotroper Körper von beliebiger Gestalt soll in Ruhe bestehen unter einer reinen Volumveränderung, welche im ganzen Inneren den festen Betrag $\omega =$ const. besitzt. Welche Kräfte sind dazu nöthig?

Die Werthe des Strain werden im ganzen Körper:

$$a = b = c = \frac{\omega}{3}, \quad l = m = n = 0. \tag{73}$$

Benutzt man nun die Gleichungen (65) zur Auffindung des Stress, so kommt:

$$X_x = Y_y = Z_z = -2K \cdot \frac{\omega}{3} - 2K\theta \cdot \omega = -2K(\theta + \tfrac{1}{3}) \cdot \omega. \tag{73a}$$

Benutzt man aber die gleichbedeutenden Gleichungen (66), so kommt:

$$X_x = Y_y = Z_z = -H \cdot \omega. \tag{73b}$$

Die drei anderen Daten verschwinden

$$Y_z = Z_x = X_y = 0. \tag{73c}$$

Man sieht, wie sich in Gleichung (73a) die Kirchhoff'schen Coefficienten K und θ zu der Gruppe vereinigen, welche wir bereits in Gleichung (64) als das Maſs für den Widerstand gegen Volumveränderung erkannt haben. Hätten wir nicht von Anfang an den Volummodul H neben dem Formmodul K als ein ausreichendes Coefficientenpaar eingeführt, so würde uns H erst hier in seiner aus K und θ zusammengesetzten Gestalt begegnet sein.

Da die drei Hauptdrucke einander gleich sind, ist der Stress in allen Richtungen der gleiche und steht senkrecht auf jedem, wie auch immer orientirten Flächenelement. Aus dem Minuszeichen erkennt man, daſs er bei positivem ω (Volumvergröſserung) ein Zug, bei negativem ω (Volumverkleinerung) ein Druck ist. An der freien Oberfläche des Körpers müssen ihm äuſsere Flächenkräfte das Gleichgewicht halten. Diese findet man aus Gleichungen (40a), die hier die einfache Gestalt annehmen:

$$X_n = -H\omega \cos nx,\quad Y_n = -H\omega \cos ny,\quad Z_n = -H\omega \cos nz \tag{73d}$$

und für jedes Oberflächenelement ds eine resultirende Kraft von der Intensität $H\omega \cdot ds$ liefern, welche normal auf dem Flächenelement steht. Bei positivem ω mufs die Kraft das Flächenelement nach aufsen ziehen, bei negativem ω nach innen drücken.

Gleichmäfsige starke Normaldrucke auf die gesammte Oberfläche eines Körpers kann man in der Praxis herstellen, indem man den Körper mit einer Flüssigkeit in geschlossenem Gefäfse umgiebt und letztere durch Eintreiben eines Stempels comprimirt. Denn der gleichmäfsige hydrostatische Druck ist der einzige in ruhenden Flüssigkeiten bestehende Stress. Der auf den Stempel von aufsen geübte Druck, den man messen kann, indem man die angewendete Kraft (etwa Belastung durch bekannte Gewichte) durch den Querschnitt des Stempels dividirt, verbreitet sich gleichmäfsig durch die ganze Flüssigkeit und drückt mit gleicher Stärke auf alle Begrenzungsflächen, sowohl auf die Stempelfläche, die dadurch im Gleichgewicht gehalten wird, wie auf die Wandungen des Gefäfses, wie auch auf die Oberfläche des eingetauchten Körpers.

Fernkräfte auf die Masse dürfen nicht wirken. In Bezug auf die Schwerkraft gilt das im vorigen Paragraphen Gesagte, doch ist stets zu überlegen, wie weit man jene Vernachlässigung nur treiben darf. In der Thermodynamik z. B. betrachtet man den Druck, unter dem ein abgeschlossenes Massensystem aus mehreren Phasen im Gleichgewicht ist, meist als eine räumliche Constante, ohne darauf Rücksicht zu nehmen, dafs doch einige Theile unten liegen müssen und durch die darüber gelagerten stärker gedrückt werden. Bei den leichten Gasen und Dämpfen ist dieser Umstand auch ganz unwesentlich, bei schweren Flüssigkeiten aber, namentlich in Gefäfsen von beträchtlicher Höhe, mufs man doch mitunter diesen Umstand berücksichtigen; z. B. wächst in einer Quecksilbersäule von 76 cm Höhe, wenn man vom oberen Spiegel bis zum Grunde herabsteigt, der Druck immerhin um eine ganze Atmosphäre.

§ 38. Gleichförmige reine Doppelscheerung.

Ein homogener isotroper Körper erfahre die durch Gleichungen (23) in § 13 definirte Doppelscheerung

$$\xi = 0,\quad \eta = \vartheta \cdot z,\quad \zeta = \vartheta \cdot y, \tag{74}$$

wo ϑ eine kleine, im ganzen Körper constante Zahl bedeutet. Welche äufseren Kräfte sind erforderlich, um diese Deformation in Ruhe zu erhalten?

Man findet folgenden Strain:

$$\left.\begin{aligned} a = b = c = m = n = 0 \\ 2\,l \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} = 2\,\vartheta, \\ \text{also} \qquad l = \vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{74 a}$$

Daraus nach Gleichungen (65) und (65 a) den Stress:

$$\left.\begin{aligned} X_x = Y_y = Z_z = Z_x \equiv X_z = X_y \equiv Y_x = 0, \\ \text{aber:} \qquad Y_z \equiv Z_y = -\,2\,K \cdot \vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{74 b}$$

An der Begrenzung müssen nach Gleichungen (40 a) folgende Flächenkräfte wirken:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= 0 \\ Y_n &= -\,2\,K\vartheta \cdot \cos n\,z \\ Z_n &= -\,2\,K\vartheta \cdot \cos n\,y \end{aligned}\right\} \tag{74 c}$$

ihre Resultante ist also in Intensität und Richtung durchaus von der Orientirung des Oberflächenelementes abhängig. Um die übersichtlichsten Umstände herauszugreifen, wollen wir dem deformirten Körper bestimmte einfache Gestalt zuschreiben:

Wir wollen jetzt annehmen, der Körper habe die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Begrenzungsebenen senkrecht auf den drei Coordinatenrichtungen stehen. Wir nehmen die x-Axe gegen den Beschauer gerichtet, die y-Axe nach rechts, die z-Axe nach oben. Auf die vordere und die hintere Grenzfläche dürfen dann keine Kräfte wirken, denn es ist hier $\cos n\,y = \cos n\,z = 0$. An der linken Grenzfläche aber ist $n = +\,y$, also $\cos n\,y = +\,1$, $\cos n\,z = 0$. Wir bekommen also nach (74 c) hier eine Kraft in der z-Richtung: $Z_y = -\,2\,K\vartheta$, dies ist eine tangentiale Schubkraft mit negativem Zeichen, sie schiebt also die linke Wand nach unten. Auf der rechten Grenzfläche, wo $n = -\,y$, mithin $\cos n\,y = -\,1$ ist, erhalten wir die entgegengesetzte Schubkraft

$$Z_{-y} = +\,2\,K\vartheta,$$

welche die rechte Wand nach oben schiebt. Die untere und obere Grenzfläche sind durch $n = \pm\,z$, also durch $\cos n\,y = 0$, $\cos n\,z = \pm\,1$

charakterisirt. Man erhält also für diese beiden Flächen reine y-Kräfte

$$Y_{\pm z} = \mp 2K\vartheta,$$

durch welche die untere Fläche nach links, die obere nach rechts geschoben wird. Die Ausdrücke $\pm 2K\vartheta$ bezeichnen die Intensität der Kräfte pro Flächeneinheit. Um die Gröfse der mechanischen Kräfte zu finden, mufs man diese also noch mit den Seitenflächen multipliciren. Man erhält so zwei absolut gleiche Kräftepaare, deren Momente

$$= \pm 2K\vartheta \cdot p \cdot q \cdot r$$

sind, p, q, r bedeuten die Kantenlängen des Körpers. Das eine ist rechtsdrehend, das andere linksdrehend. Die drehenden Wirkungen heben sich also auf, die scheerenden Wirkungen verstärken sich. Die erforderliche Stärke dieser äufseren Kraftwirkungen wird bedingt nur durch den Form-Modul K, das Volumen $p \cdot q \cdot r$ und die kleine Zahl 2ϑ, welche die Verzerrung des rechten Winkels zwischen den ursprünglich mit y und z parallelen Kanten mifst.

Noch eine zweite Gestalt des Körpers wollen wir jetzt annehmen, um zu zeigen, wie die nämlichen Ausdrücke (74 c) bei verschiedener Lage der Oberflächen ganz verschiedene Angaben enthalten. Dieselbe durch (74) vorgeschriebene Doppelscheerung soll einem rechtwinkligen Parallelepiped erteilt werden, dessen Lage gegen die Coordinataxen man sich dadurch veranschaulichen kann, dafs man den Körper des vorigen Beispiels durch einen halben rechten Winkel um die x-Axe gedreht denkt.

In Fig. 7 ist sein Querschnitt mit der verticalen (y, z)-Ebene gezeichnet. Die vier schrägen Seitenflächen sind durch die daselbst abzulesenden Indices 1, 2, 3, 4 numerirt, es zeigt also

n_1 nach links oben
n_2 „ rechts unten
n_3 „ links unten
n_4 „ rechts oben.

Die inneren Normalen auf den beiden übrigen Flächen weisen horizontal nach hinten und nach vorn. Auf diese beiden dürfen also, wie im vorigen Beispiel, keine Kräfte wirken, denn es ist dort $\cos ny = \cos nz = 0$.

Auf den vier schrägen Flächen sind $\cos ny$ und $\cos nz$ überall dem absoluten Werte nach gleich $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Negativ sind $\cos n_1 y$, $\cos n_3 y$,

$\cos n_2 z$, $\cos n_3 z$, positiv sind $\cos n_2 y$, $\cos n_4 y$, $\cos n_1 z$, $\cos n_4 z$. Die Oberflächenkräfte haben also nach Gleichungen (74 c) folgende Werthe:

$$X_{n1} = X_{n2} = X_{n3} = X_{n4} = 0$$

$$\begin{array}{ll} Y_{n1} = -\sqrt{2}\,K\vartheta & Z_{n1} = +\sqrt{2}\,K\vartheta \\ Y_{n2} = +\sqrt{2}\,K\vartheta & Z_{n2} = -\sqrt{2}\,K\vartheta \\ Y_{n3} = +\sqrt{2}\,K\vartheta & Z_{n3} = +\sqrt{2}\,K\vartheta \\ Y_{n4} = -\sqrt{2}\,K\vartheta & Z_{n4} = -\sqrt{2}\,K\vartheta \end{array}$$

Fig. 7.

Bildet man daraus die Resultanten, so findet man für alle 4 Indices den gleichen Betrag:

$$R_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2} = 2K\vartheta.$$

Die Richtungen lassen sich aus den Vorzeichen der vorstehenden Kraftcomponenten leicht ablesen, und sind in Fig. 7 durch gefiederte Pfeile angegeben. Sie stehen auf allen vier Flächen senkrecht, auf 1 und 2 sind es normale Drucke, auf 3 und 4 normale Zugkräfte. Die Begrenzungsflächen unseres Körpers liegen jetzt nämlich normal zu den drei Hauptaxen des Strain und Stress, die äufseren Flächenkräfte haben daher die inneren Hauptdrucke, welche immer normal stehen (vergl. § 25), im Gleichgewicht zu halten. Die drei Hauptdilatationen in den gleichen Hauptrichtungen (Kanten des Körpers) sind 0, $-\vartheta$, $+\vartheta$ (vergl. § 14). Man hätte die Oberflächenkräfte für diesen Körper auch finden können, indem man das (y, z)-Kreuz drehte und dann an Stelle der Formeln (74) die auf diese neuen Axensystem bezüglichen Formeln

$$\xi = 0, \quad \eta = -\vartheta \cdot y, \quad \zeta = +\vartheta z$$

aus den Gleichungen (24_1) der Rechnung zu Grunde legte.

Da jede reine Formänderung zusammengesetzt werden kann aus zwei Doppelscheerungen (vergl. § 14), und da der Superposition der Verrückungen auch die der Kräfte entspricht, so liegen in den drei Formeln (74 c) die Angaben für die Oberflächenkräfte zu allen gleichförmigen Deformationen, denn eine eventuell noch geforderte Volumänderung kann man durch Superposition eines hydrostatischen Druckes immer leicht hinzufügen.

§ 39. Zwei gleiche Hauptdilatationen.

Gegen Ende von § 10 wurde der Fall zweier gleicher Hauptdilatationen bereits betrachtet als Erscheinung; hier stellen wir nun die Frage, welche äufseren Kräfte geeignet sind, ihn zu erzeugen. Wir legen die x-Axe in Richtung der einen ausgezeichneten Hauptdilatation σ_1; die y- und z-Axe geben dann, wie sie gelegt sein mögen, die zwei Richtungen der anderen Hauptdilatationen von der gemeinsamen Gröfse σ_2, denn diese herrscht in allen auf x senkrechten Richtungen. Die Straindaten besitzen im ganzen Körper die festen Werthe

$$\left.\begin{array}{l} a = \sigma_1, \quad b = c = \sigma_2, \quad l = m = n = 0. \\ \text{Die Volumdilatation ist } \omega = \sigma_1 + 2\sigma_2. \end{array}\right\} \tag{75}$$

Die Stressdaten findet man nach (65) oder (66):

$$\left.\begin{array}{lrl} & X_x = & -2K\sigma_1 - 2K\theta(\sigma_1 + 2\sigma_2) \\ \text{oder} & = & -H(\sigma_1 + 2\sigma_2) - \frac{4}{3}K(\sigma_1 - \sigma_2) \\ & Y_y = Z_z = & -2K\sigma_2 - 2K\theta(\sigma_1 + 2\sigma_2) \\ \text{oder} & = & -H(\sigma_1 + 2\sigma_2) + \frac{2}{3}K(\sigma_1 - \sigma_2) \\ & Y_z = Z_x = X_y = 0. & \end{array}\right\} \tag{75 a}$$

An der Oberfläche müssen nach (40 a) mit Hinblick auf vorstehende Ausdrücke folgende äufseren Flächenkräfte das Gleichgewicht herstellen:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= X_x \cos nx \\ Y_n &= Y_y \cos ny \\ Z_n &= Z_z \cos nz. \end{aligned}\right\} \quad (75\,\text{b})$$

Man mufs sich dabei für X_x, Y_y, Z_z die vorstehenden Ausdrücke mit σ_1 und σ_2 eingesetzt denken.

Um auch in dieser Aufgabe auf die einfachsten Verhältnisse zu kommen, wollen wir dem Körper eine dem Charakter dieser Deformation angepasste Gestalt zuschreiben; er sei begrenzt durch einen beliebigen Cylindermantel, dessen erzeugende Geraden parallel der Hauptdilatation σ_1, also parallel der x-Axe laufen, und durch zwei darauf senkrechte ebene Endflächen. An diesen beiden Endflächen ist $n = \pm x$, also $\cos nx = \pm 1$, $\cos ny = \cos nz = 0$, dort müssen daher auch $Y_n = Z_n = 0$ sein; es dürfen nur normale Druck- oder Zugkräfte angreifen. Man durchschaut auch leicht, dafs diese Kräfte auf beiden Endflächen entgegengesetzt gleich sein müssen und dafs sie einen positiven Druck anzeigen, wenn der algebraische Ausdruck von X_x, welcher in Gleichungen (75 a) angegeben ist durch zwei Glieder mit explicitem Minuszeichen, thatsächlich einen positiven Werth annimmt. Ist der Werth von X_x aber wirklich negativ, so wird dadurch Zugkraft auf beide Endflächen gefordert. Welcher von beiden Fällen zutrifft, hängt von den Vorzeichen der gegebenen Zahlen σ_1 und σ_2 ab; falls sie ungleichstimmig sind, kommt zum Theil dabei auch noch das Gröfsenverhältnifs der beiden Elasticitäts-Moduln der gewählten Substanz in Frage.

Die Flächenelemente des Cylindermantels haben die Besonderheit, dafs deren Normale überall senkrecht zur x-Richtung steht. Deshalb ist dort $\cos nx = 0$ und $\cos nz = \sin ny$, wie auch die Leitcurve der Cylinderfläche gestaltet sein mag. Folglich nehmen die Componenten der Oberflächenkräfte (75 b) auf dem Cylindermantel folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= 0 \\ Y_n &= Y_y \cos ny \\ Z_n &= Z_z \sin ny. \end{aligned}\right\} \quad (76)$$

Da ferner nach (75 a) auch $Y_y = Z_z$, so findet man

$$\left.\frac{Z_n}{Y_n} = \operatorname{tang} ny.\right\} \quad (76\,\text{a})$$

Das bedeutet aber, dafs die Resultante der Flächenkraft in die

Richtung $\pm n$ fällt, also ebenfalls stets eine normale Druck- oder Zugkraft sein mufs. Ihre Intensität ist:

$$R_n = \sqrt{Y_n^2 + Z_n^2} = Y_y = Z_z, \tag{76 b}$$

also für alle Flächentheile des Cylindermantels die gleiche, unabhängig von der Richtung der Normale. Ihr Werth in σ_1 und σ_2 findet sich in Gleichungen (75 a), sie bedeutet Druck oder Zug, je nachdem dieser Werth positiv oder negativ ausfällt, was wieder von der Vorschrift der σ_1 und σ_2, mitunter auch von der Gröfse der beiden Elasticitätsmoduln abhängt.

Wir wollen nun einige besondere Fälle dieser Cylinderdeformation betrachten.

1. Die Hauptdilatationen σ_1 und σ_2 seien so gewählt, dafs das Volumen ungeändert bleibt. Dann mufs $\omega = \sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$ sein, mithin

$$\sigma_2 = -\frac{\sigma_1}{2}. \tag{77}$$

Daraus folgt für die Kräfte an den Endflächen:

$$X_x = -2K\sigma_1 \tag{77 a}$$

und für die Kräfte am Cylindermantel

$$R_n = +K\sigma_1. \tag{77 b}$$

Bedeutet σ_1 eine wahre Längsdehnung, besitzt also einen positiven Werth, so hat man auf die Endflächen Zugkräfte auszuüben, auf die Cylinderoberfläche Druckkräfte von der halben Stärke. Man bemerke auch, dafs die für Volumelasticität charakteristischen Coefficienten θ oder H ohne Einflufs auf die Werthe dieser Kräfte bleiben. Diese Deformation ist ein besonderer Fall von reiner Formänderung. Man hätte sie auch nach dem Muster des vorigen Paragraphen aus zwei Doppelscheerungen zusammensetzen können.

2. Der Cylinder soll ohne Aenderung seines Querschnittes in der Längsrichtung gedehnt werden; wir sollen also σ_1 positiv und $\sigma_2 = 0$ setzen. Dann wird:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -2K(1+\theta)\cdot\sigma_1 \quad \text{oder} \quad = -(H + \tfrac{4}{3}K)\cdot\sigma_1 \\ R_n &= -2K\theta\cdot\sigma_1 \qquad\quad\ \text{oder} \quad = -(H - \tfrac{2}{3}K)\cdot\sigma_1. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Beide Ausdrücke sind negativ, fordern also Zugkräfte sowohl an den Endflächen wie am Cylindermantel, doch mufs der Zug in der Längsrichtung stärker sein, weil $(1 + \theta)$ gröfser als θ ist. Bei den sehr festen Substanzen (Stahl, Glas), deren θ sich dem Werthe $\frac{1}{2}$ nähern, mufs der Längszug etwa dreimal so stark sein, wie die Querzüge.

Einem dritten Sonderfall wollen wir seiner theoretischen und praktischen Wichtigkeit wegen einen besonderen Paragraphen widmen.

§ 40. Fortsetzung. Auf den Cylindermantel wirken keine Kräfte. Spannung eines Drahtes.

Die Bedingungen für die beiden zuletzt betrachteten Arten der Cylinderdeformation sind experimentell wohl kaum herzustellen, weil man die geforderten gleichmäfsigen Druck- oder Zugkräfte auf dem Cylindermantel nicht recht anzubringen versteht. Die in der Längsrichtung an den Endflächen nöthigen Kräfte kann man dagegen in verschiedener Weise verhältnifsmäfsig leicht herstellen. Soll ein Druck erzeugt werden, so prefst man den Cylinder zwischen zwei möglichst harten parallelen Platten; die äufsere Kraft kann man entweder durch starke Belastung, durch Hebelwirkungen, Anziehen von Schrauben oder durch eine hydraulische Presse anbringen. Freilich werden dabei, streng genommen, auch die ebenen Platten deformirt, indem die Endflächen des Cylinders sich in diese hineindrücken und dabei nothwendig eine wenn auch schwache convexe Krümmung annehmen. Es entsteht dadurch in nächster Nähe der Cylinderenden eine ungleichförmige Deformation, aber bereits in Querschnitten, welche nur um die Länge der Cylinderbreite von den Enden abstehen, kann man getrost annehmen, dafs ein gleichmäfsig vertheilter rein axialer Druck den ganzen Cylinder durchsetzt. Noch leichter ist es longitudinale Zugkräfte herzustellen: Man braucht den Cylinder nur vertical aufzuhängen und an seinem unteren Ende ein schweres Gewicht zu befestigen, welches den Cylinder spannt. Auch hier hat man in nächster Nähe der Aufhängungsvorrichtung und der Befestigung des angehängten Gewichtes ungleichförmige Deformationen und Kräfte zu erwarten, die aber bereits in geringem Abstande von den Enden in einen gleichmäfsig vertheilten Zug übergehen. Das spannende Gewicht mufs dasjenige des Cylinders selbst weit übertreffen, andernfalls werden die dadurch erzeugten Deformationen unmerklich klein oder, falls es doch gelingen sollte sie zu spüren, jedenfalls im ganzen Drahte ungleichförmig, denn dann ist die deformirende Wirkung der eigenen Schwere des Cylinders nicht mehr verschwindend gegenüber der durch die Belastung erzeugten, die Bemerkung am Schlusse des § 36 über die Vernachlässigung der Schwerkraft wird dann hinfällig, und diese Schwierigkeit mufs man zu vermeiden suchen. Um nun mit mäfsigen Spannungen von wenigen Kilogrammgewichten merkbare Deformationen erzielen zu können, giebt man den Cylindern die Gestalt langer dünner Drähte, in deren frei herabhängender Länge dann ein gleichmäfsiger longitudinaler Stress X_x herrscht, dessen Werth man genau angeben kann. Ist M die angehängte Masse, so ist die spannende Kraft gleich $M \cdot g$. Da diese sich gleichmäfsig über den Querschnitt q des Drahtes vertheilt, so ist die Flächenkraft

$$X_x = -\frac{Mg}{q}. \tag{79}$$

Das Minuszeichen bedeutet Zug. Die Gröfsen der rechten Seite sind recht sicher bestimmbar, M mit der Wage; die Schwerebeschleunigung g ist für jeden Ort genauer ermittelt, als hierfür erforderlich. Die Bestimmung des Querschnittes q ist verhältnifsmäfsig die unsicherste. Die geometrische Ausmessung, etwa Bestimmung des Durchmessers, giebt Resultate von geringer Zuverlässigkeit. Ueberdies pafst sie nur für kreisförmige Querschnitte, die ja die gewöhnlichen Drähte wohl nahezu besitzen, die aber in unserer Theorie garnicht gefordert werden. Am besten mifst man q, indem man die Masse m in der Drahtlänge l und die Dichtigkeit μ des Materials bestimmt. Das Volumen des Drahtes ist dann $l \cdot q$, also $m = \mu \cdot l \cdot q$ oder $q = \frac{m}{\mu \cdot l}$, mithin

$$X_x = -\frac{M}{m} \mu g l. \tag{79a}$$

Auf den Mantel des Drahtes wirken bei diesem Experiment keine seitlichen Kräfte, es ist also

$$Y_y = Z_z = 0. \tag{79b}$$

Wenn wir nun fragen, welche Deformation durch diese Spannung in dem Drahte hervorgerufen wird, so haben wir eigentlich eine Aufgabe der zweiten Klasse vor uns, denn die Kräfte sind gegeben, die Verrückungen werden gesucht. Es ist dies aber einer der Fälle, in denen man sich die Lösung einer entsprechenden Aufgabe der ersten Klasse zu Nutze machen kann. Wir brauchen nur unsere Gleichungen (75a) zu befragen, wie man σ_1 und σ_2 wählen mufs, damit X_x den durch das angehängte Gewicht bedingten und in Gleichung (79) angegebenen negativen Werth annehme, und damit ferner $Y_y \equiv Z_z \equiv R_n$ den Werth Null bekomme. Wir erhalten so zwei lineare Gleichungen für die Unbekannten σ_1 und σ_2:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -2K\sigma_1 - 2K\theta(\sigma_1 + 2\sigma_2) \text{ oder } = -H(\sigma_1 + 2\sigma_2) - \tfrac{4}{3}K(\sigma_1 - \sigma_2) \\ 0 &= -2K\sigma_2 - 2K\theta(\sigma_1 + 2\sigma_2) \text{ oder } = -H(\sigma_1 + 2\sigma_2) + \tfrac{2}{3}K(\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned}\right\} \quad (80)$$

Die zweite dieser Gleichungen ist homogen, liefert daher ein festes Gröfsenverhältnifs zwischen den Unbekannten:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = -\frac{\theta}{1+2\theta} \quad \text{oder} \quad = -\frac{3H-2K}{6H+2K}. \quad (81)$$

Dies kann man benutzen, um in der ersten Gleichung σ_2 durch σ_1 auszudrücken, sie nimmt dadurch die Form an:

$$X_x = -2K\cdot\frac{1+3\theta}{1+2\theta}\sigma_1 \quad \text{oder} \quad = -\frac{9HK}{3H+K}\sigma_1. \quad (82)$$

Diese beiden Gleichungen (81) und (82) enthalten die aus der Theorie abgeleiteten vollständigen Angaben über die gesuchte Deformation. Die zweite Gleichung (82) sagt aus, dafs die Verlängerung des Drahtes proportional der spannenden Kraft wächst; der Proportionalitätsfactor erscheint in complicirter Weise aus den beiden von uns bisher benützten Coefficienten K, θ oder H, K zusammengesetzt. Bezeichnen wir diesen festen Factor mit E:

$$E = 2K\cdot\frac{1+3\theta}{1+2\theta} \quad \text{oder} \quad = \frac{9HK}{3H+K} \quad (83)$$

und setzen wir aus Gleichung (79) den Ausdruck für X_x ein, so lautet das in (82) ausgesprochene Gesetz:

$$\frac{Mg}{q} = E\cdot\sigma_1. \quad (84)$$

Dieses Resultat der Theorie gehört zu den am leichtesten durch experimentelle Messungen prüfbaren und bestätigten Thatsachen. Dafs M, g, q genau bestimmt werden können, wurde schon erwähnt, es handelt sich noch um die Messung von σ_1. Um die unregelmäfsigen Deformationen an den Drahtenden zu umgehen und um überhaupt scharf bestimmte Endflächen anzunehmen, macht man auf der freien Drahtlänge oben und unten je eine feine Marke, auf welche man das Fadenkreuz eines Oculars einstellen kann. Die beiden horizontalen Querschnitte durch diese Marken bilden dann die Enden des betrachteten Cylinders; alles was aufserhalb der Marken liegt, ist nur Apparat zur Erzeugung der gleichförmig über die Endflächen vertheilten Zugkräfte X_x. Man bestimmt nun mit einem Kathetometer den Abstand l zwischen beiden Marken im Zustand einer mäfsigen Drahtspannung. Dann erhöht man die Spannung durch Anhängen des Gewichtes M. Beide Marken erscheinen dann gesenkt, die untere um mehr, und die Differenz der Senkungen giebt die Verlängerung λ der Drahtstrecke l, die in unserer Theorie benutzte Längendilatation ist also

$$\sigma_1 = \frac{\lambda}{l} \tag{85}$$

und die Formel (84) lautet nun

$$\frac{Mg}{q} = E \cdot \frac{\lambda}{l} \tag{85a}$$

oder

$$\lambda = \frac{Mgl}{E \cdot q} \tag{85b}$$

oder

$$E = \frac{Mgl}{q \cdot \lambda} \tag{85c}$$

Der Coefficient E ist die älteste durch Messungen festgestellte elastische Constante und wird häufig ohne näheren Zusatz mit dem historischen Namen „Elasticitätsmodul“ oder „erster Elasticitätscoefficient“ bei den Engländern mit „YOUNG's Modul“ bezeichnet. Man sieht aus Gleichung (85c), dafs man alle Mittel in der Hand hat, ihn recht genau zu messen für Substanzen, die sich zu cylindrischen oder prismatischen Drähten formen lassen. Wo das Bedenken, dafs das Material in gezogenen Drähten nicht mehr isotrop ist, auftritt, thut man gut, ausgeglühte Drähte zu benützen. Durch die hohe Temperatur pflegen innere Spannungen ausgeglichen zu werden. Ein Uebelstand bei dieser statischen Mefsmethode ist die elastische Nachwirkung. Die Verlängerung λ nimmt nämlich während der Spannung noch langsam etwas zu, und nach Aufhebung der Spannung bleibt die Drahtlänge anfangs noch etwas gröfser als der Anfangswerth l. Eine andere Mefsmethode, Bestimmung der Tonhöhe von Longitudinalschwingungen in Stäben, wobei Verlängerungen und Verkürzungen sehr schnell periodisch wechseln, ist von diesem Uebelstande frei. (Siehe § 55 gegen Ende!)

Die andere Seite der Erscheinung nun, die Quercontraction des gedehnten Drahtes, welche durch den festen negativen Werth des Verhältnisses σ_2/σ_1 in Gleichung (81) angezeigt wird, kann bei diesem Experiment wohl niemals durch Messungen bestätigt werden, denn die verschwindend kleine Verminderung des bereits kleinen Drahtdurchmessers entzieht sich der Beobachtung. Poisson hat zuerst diese Erscheinung aus seiner Theorie gefolgert, man nennt nach ihm den absoluten Werth jenes Quotienten die Poisson'sche Zahl. Er ging freilich zu weit, und kam zu dem Schlufs, dafs diese Zahl für alle Substanzen den gemeinsamen Werth $\frac{1}{4}$ haben müsse. Messungen, die nach anderen Methoden (siehe z. B. § 44 und 46) ausgeführt werden können, ergaben allerdings für Stahl und Glas Werthe nahe bei 0,25, aber für die meisten Stoffe, auch gut elastische Metalle, zeigen sich gröbere Abweichungen. Die Werthe liegen meist zwischen 0,2 und 0,4. Wir wollen für diese Zahl das übliche Zeichen μ gebrauchen. Es ist also nach Gleichung (81):

$$\mu = \frac{\theta}{1 + 2\,\theta} \quad \text{oder} \quad = \frac{3\,H - 2\,K}{6\,H + 2\,K}. \tag{86}$$

Die beiden Constanten E und μ sind somit zwei unabhängige Angaben, welche die elastischen Eigenschaften einer isotropen Substanz ebenso vollständig zu charakterisiren vermögen, wie eines der beiden bisher von uns gebrauchten Paare von Coefficienten. Man kann auch durch leichte Umrechnungen der Gleichungen (83) und (86) die anderen Coefficienten durch E und μ ausdrücken.

Um diese gegenseitigen Beziehungen der verschiedenen Moduln übersichtlich bei einander zu haben, sei folgende Tabelle (87) aufgestellt, in welcher zur kurzen Bezeichnung das Paar K, θ Kirchhoff, das Paar H, K Helmholtz, das Paar E, μ Young-Poisson genannt ist. Die früher schon gefundenen Relationen (64) und (64a) wurden der Vollständigkeit wegen mit aufgenommen.

Für die sehr festen Substanzen, wie Gufsstahl und Glas, bei denen die Poisson'sche Zahl nahezu den Werth $\mu = \frac{1}{4}$, die Kirchhoff'sche Zahl also nahezu den Werth $\theta = \frac{1}{2}$ besitzt, kann man statt der verschiedenen aufgeführten Formeln mit folgenden Näherungsformeln auskommen:

$$5\,K = 3\,H = 2\,E, \tag{87a}$$

wofür auch die Proportionsfolge

$$K : H : E = 6 : 10 : 15 \tag{87b}$$

gesetzt werden kann.

	Kirchhoff	Helmholtz	Young-Poisson
Kirchhoff	K θ	$K = K$ $\theta = \frac{H}{2K} - \frac{1}{3}$	$K = \frac{E}{2(1+\mu)}$ $\theta = \frac{\mu}{1-2\mu}$
Helmholtz	$H = 2K(\theta + \frac{1}{3})$ $K = K$	H K	$H = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ $K = \frac{E}{2(1+\mu)}$
Young-Poisson	$E = 2K\frac{1+3\theta}{1+2\theta}$ $\mu = \frac{\theta}{1+2\theta}$	$E = \frac{9HK}{3H+K}$ $\mu = \frac{3H-2K}{6H+2K}$	E μ

(87)

§ 41. Torsion.

Bei den bisher in diesem Theile betrachteten Arten von Deformationen waren die Straindaten durch den ganzen Körper constante Zahlen, die Verrückungscomponenten also lineare Functionen der Ortscoordinaten. Jetzt wollen wir noch zwei wichtige Deformationen, Torsion und Biegung, betrachten, bei denen die Verrückungen durch Ausdrücke zweiten Grades dargestellt werden müssen, so dafs die Straindaten selbst noch linear von den Coordinaten abhängig sind. Die Deformationen können nicht gleichförmig genannt werden, auch sind sie mit Verdrehungen der kleinsten Theilchen verbunden.

Die regelmäfsige Torsion definiren wir als eine Deformation, bei welcher alle Punkte eines Massenbereiches um eine feste gerade Axe (wir wählen diese zur x-Axe) auf Kreisbögen verrückt werden um Winkel, welche proportional der x-Abmessung der Punkte wachsen. Von der y- und z-Abmessung sollen diese Winkel unabhängig sein, alle Punkte also, welche in ein und derselben auf der Torsionsaxe senkrechten Ebene liegen, werden um den gleichen Winkel gedreht, relative Lagenänderungen zwischen den Mitgliedern solcher Punktschaaren werden dadurch nicht hervorgebracht, vielmehr erscheint die ganze Massenebene, als wäre sie starr, um einen mit ihrer x-Abmessung proportionalen Winkel gedreht. Dagegen werden solche

Punktreihen, welche vor der Deformation eine zur Torsionsaxe parallele Gerade besetzten, so verrückt, daſs sie eine Schraubenlinie bilden, deren Neigung gegen die x-Richtung um so gröſser ist, je weiter die betrachtete Punktreihe von der festen Torsionsaxe absteht. Damit die Deformation in allen Theilen des Massenbereiches eine kleine sei — darauf müssen wir bei festen elastischen Stoffen die Betrachtung immer beschränken — muſs die Neigung der erwähnten Schraubenlinien gegen die x-Richtung auch in den von der Torsionsaxe entferntesten Theilen des Bereiches eine geringe bleiben. Dagegen können die Drehungswinkel der Querebenen groſse endliche Werthe annehmen, ohne daſs die Deformation der Theilchen aufhört, klein zu sein. Bedingung ist dabei nur, daſs die y- und z-Abmessungen dann sehr klein gegen die x-Abmessung werden müssen, daſs also der deformirte Körper in der x-Richtung eine hervorragend langgestreckte dünne Gestalt besitzt. Betrachten wir aber die Torsion in Körpern, welche nach allen Richtungen Ausdehnungen von gleicher Gröſsenordnung zeigen, so müssen auch die Drehungswinkel selbst im ganzen Bereich klein bleiben, die Verrückungsbögen sämmtlicher Punkte dürfen dann wie geradlinige Strecken betrachtet werden. Da eine gemeinsame Drehung des ganzen Körpers um die Torsionsaxe keine Deformation erzeugt, kann man eine beliebige der Querebenen als unverrückte Grundebene, (y, z)-Ebene, festsetzen, von welcher aus dann die Abstände x der anderen Ebenen gemessen werden.

Wir schreiten nun zur analytischen Darstellung der beschriebenen Torsion und beschränken uns dabei zunächst auf solche Gebiete, in denen die Verrückungen als geradlinige Strecken gelten dürfen. Wir betrachten einen Massenpunkt mit der natürlichen Lage x, y, z. Er wird verrückt um den kleinen Winkel τ, welcher proportional x sein soll, also mit Hülfe eines durch den ganzen Bereich constanten Factors $\frac{1}{h}$ ausgedrückt werden kann durch

$$\tau = \frac{x}{h}. \tag{88}$$

Die Bedeutung von h ist leicht zu erkennen: Es ist die x-Abmessung derjenigen Querebene, welche um den endlichen Winkel $\tau = 1$, das ist etwa $57{,}3^0$, gedreht wird. Diese Abscisse h liegt also weit auſserhalb des jetzt zunächst betrachteten Gebietes, man kann aber in der Vorstellung die Torsion immer bis zu jener Stelle gleichmäſsig fortgesetzt denken, wenn man sich den Sinn von h veranschaulichen will.

Beifolgende Figur 8 stelle die zu einem bestimmten positiven x gehörige Querebene dar. Die x-Axe ist gegen den Beschauer gerichtet und tritt durch den Punkt O, Oy nach rechts und Oz nach oben sind parallel den anderen beiden Coordinataxen. P ist die natürliche Lage eines Massenpunktes im positiven Quadranten, Q dessen verrückte Lage. Es ist dann $OP = OQ = r = \sqrt{y^2 + z^2}$ der Radius des kleinen Kreisbogens $PQ = r \cdot \tau$. Es handelt sich also um die Verrückungscomponenten ξ, η, ζ der Resultante PQ. Da

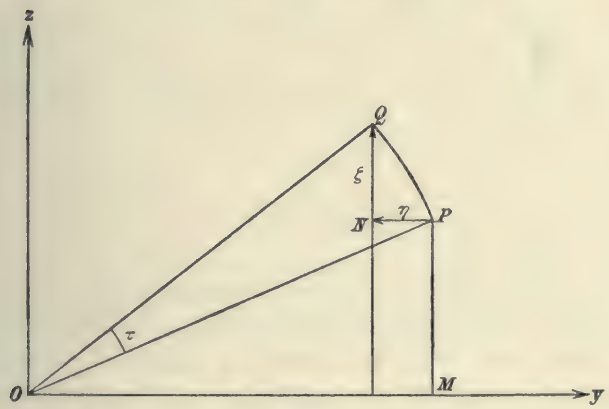

Fig. 8.

diese in der Querebene liegt, ist $\xi = 0$. Ferner sieht man, daſs $\eta = PN$ negative, daſs $\zeta = NQ$ positive Richtung besitzt. Aus der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke PNQ und PMO ergiebt sich die Proportionsfolge

$$(-\eta) : \zeta : r\tau = z : y : r.$$

Erweitert man rechts mit τ, wodurch das Gröſsenverhältniſs nicht verändert, aber die dritten Glieder identisch werden, so findet man $-\eta = z\tau$ und $\zeta = y\tau$. Diese Formeln gelten, wie man sich leicht überzeugt, mit den gleichen Vorzeichen für alle vier Quadranten derselben Querebene. Setzt man für τ noch dessen Werth aus (88) ein, so erhält man die Verrückungscomponenten für jeden Punkt des betrachteten Bereiches:

$$\xi = 0, \quad \eta = -\frac{zx}{h}, \quad \zeta = \frac{xy}{h}. \tag{89}$$

Interessant ist es noch die Neigung der oben erwähnten Schraubenlinien, in welche die ursprünglich geraden Fasern parallel der Torsionsaxe übergehen, kennen zu lernen. Betrachten wir ein kurzes Stück einer solchen Faser von der Länge x und dem Abstand r von der Axe. Das in der Grundebene liegende Ende liegt fest, das andere Ende wird verrückt um die Strecke $r\tau = \frac{r\,x}{h}$. Diese Verrückung und die ursprüngliche Lage der Faser bilden die Katheten eines sehr schmalen rechtwinkligen Dreiecks, welches streng genommen auf einen Kreiscylindermantel vom Radius r gezeichnet ist, aber als eben gelten kann, so lange die Verrückung als geradlinig gelten darf. Der kleine Winkel, welcher der Verrückungskathete gegenüber liegt, ist die gesuchte Neigung der Schraubenlinie, welche wir ϑ nennen wollen. Da man bei so kleinen Winkeln die trigonometrische Tangente dem Bogenwerthe gleichsetzen darf, findet man

$$\vartheta = \frac{r\tau}{x} = \frac{r}{h}. \tag{90}$$

Man könnte dieses Resultat auch dadurch finden, dafs man die Torsion bis zur Abscisse h fortgesetzt denkt. Das Ende der langen Faser h wird dann auf dem Kreise vom Radius r herumgedreht um einen endlichen Bogen, $\tau = 1$, der Bogen ist also selbst $= r$. Man mufs das rechtwinklige Dreieck dann erst von dem Cylindermantel abgerollt denken, damit die Schraubenlinie zur geradlinigen Hypotenuse werde; der Neigungswinkel ϑ aber leidet nicht unter dieser Abwickelung. Die kurze Kathete ist r, die lange ist h, also $\vartheta = \frac{r}{h}$ wie oben.

Aus den Verrückungen (89) müssen nun zunächst die Straindaten abgeleitet werden; dazu brauchen wir die Differentialquotienten der ξ, η, ζ nach den Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} = -\dfrac{z}{h} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} = +\dfrac{y}{h} \\[2ex]
\dfrac{\partial \xi}{\partial y} = 0 & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 0 & \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} = +\dfrac{x}{h} \\[2ex]
\dfrac{\partial \xi}{\partial z} = 0 & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} = -\dfrac{x}{h} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.
\end{array}\right\} \tag{89a}$$

Daraus bildet man nach Gleichungen (10a′) S. 21.

$$\left.\begin{array}{lll} a = 0 & b = 0 & c = 0 \\ l = 0 & m = + \dfrac{y}{2h} & n = - \dfrac{z}{2h} \\ \lambda = + \dfrac{x}{h} & \mu = - \dfrac{y}{2h} & \nu = - \dfrac{z}{2h}. \end{array}\right\} \qquad (91)$$

Die sechs Straindaten $abclmn$ sind durchweg unabhängig von x, sie gelten daher auch für gröfsere Abscissen x, in denen die Verrückungen nicht mehr geradlinig, sondern deutlich gebogen erscheinen. Der locale Charakter der Torsion bleibt auch dort derselbe. Man braucht in einem solchen Gebiet mit grofser Abscisse x nur eine gemeinsame endliche Drehung des Ganzen vorgenommen zu denken, oder das (y, z)-Kreuz der Coordinaten zu drehen, um dort wieder unendlich kleine Verrückungen zu finden. Mit anderen Worten: Die in den ersten zwei Zeilen der Gleichungen (91) angegebenen Straindaten gelten unbeschränkt auch für grofse Werthe x, also auch für grofse Winkel τ, wenn man nur unter y, z nicht die Coordinaten der Ruhelage, sondern die der verrückten Lage versteht. In dem ganzen tordirten Bereich, bis zu beliebig grofsen Werthen x, besitzen alle die Massentheilchen, welche gleiche y- und z-Coordinaten in der deformirten Lage erlangt haben, auch identische Deformationsdaten.

Die dritte Zeile der Gleichungen (91) zeigt an, dafs zur Verzerrung eine Drehung der Massenelemente hinzukommt, deren Componenten durch λ. μ, ν angegeben werden. Man kann sich das Auftreten dieser Drehungen leicht erklären. Ein Volumelement in Cylindercoordinaten, begrenzt durch zwei sehr nahe Ebenen quer gegen x, durch zwei sehr nahe Radialebenen, welche sich in der x-Axe schneiden, und durch zwei sehr nahe Kreiscylinderflächen um die x-Axe, kann als rechtwinkliges Parallelepiped gelten. Das darin enthaltene Massenelement wird bei der Torsion erstens als ganzes um die x-Axe gedreht durch den Winkel $\tau = \frac{x}{h}$. Dem entspricht die in (91) auftretende Drehungscomponente $\lambda = \frac{x}{h}$. Ferner aber wird das Massenelement durch die stärkere Drehung seiner unteren Grenzebene auch verzerrt, die ursprünglich mit x parallelen Kanten erhalten durch die Torsion die Neigung der erwähnten Schraubenlinien $\vartheta = \frac{r}{h}$. Diese Deformation ist in hinreichend kleinen Theilchen eine einfache Scheerung von der Art, wie sie durch Fig. 3 auf

S. 46 wiedergegeben ist. Wir sahen damals bereits, daſs eine solche einfache Scheerung eine Drehung enthält. Die Axe, um welche diese zweite Drehung erfolgt, ist hier der Radius, welcher von der Torsionsaxe senkrecht ausgehend das Massenelement durchsticht und zwar ist der Sinn dieser Drehung dann negativ, denn der Pfeil der Drehung (siehe Fig. 1 auf S. 24) weist vom Massenelement nach der Axe hin, also in Richtung der abnehmenden Werthe von r.

Die absolute Gröſse dieses Drehungswinkels können wir der früheren Betrachtung der einfachen Scheerung (Gleichung 22′) entnehmen. Dort wurde gezeigt, daſs er halb so groſs ist wie der Scheerungswinkel. Letzterer ist nun in unserem Fall der Schraubenwinkel ϑ, also ist die zweite Drehung unseres Theilchens um seine radiale Axe r

$$= -\frac{\vartheta}{2} = -\frac{r}{2h}.$$

Diese haben wir nun noch zu zerlegen in zwei componirende Drehungen um die y-Axe und um die z-Axe. Dies geschieht, wie bei jedem Vector, durch Zusatz der Factoren $\cos(ry)$ resp. $\cos(rz)$. Diese kann man mittels der Coordinaten y und z des Theilchens ausdrücken durch $\frac{y}{r}$ resp. $\frac{z}{r}$. Die beiden Drehungscomponenten werden also nach Weghebung von r in Zähler und Nenner: $-\frac{y}{2h}$ und $-\frac{z}{2h}$ in Uebereinstimmung mit den in (91) gefundenen Werthen für μ und ν.

In die Werthe für den Stress, die wir jetzt aufsuchen müssen, gehen übrigens diese λ, μ, ν nicht mit ein; wir brauchen dazu nur die 6 Straindaten aus (91). Man findet auf Grund der Gleichungen (65)

$$\left.\begin{aligned} X_x = Y_y = Z_z = Y_z \equiv Z_y &= 0 \\ Z_x \equiv X_z &= -K\frac{y}{h} \\ X_y \equiv Y_x &= +K\frac{z}{h}. \end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

Der Stress ist also gleichwie der Strain unabhängig von der Abscisse x. Die Ausdrücke gelten deshalb auch für beliebig groſse x, wenn man unter y und z die deformirten Lagen, nicht die natürlichen Lagen der Theilchen versteht.

An der Oberfläche des Körpers müssen äuſsere Flächenkräfte das Gleichgewicht herstellen. Diese findet man aus Gleichungen (40 a):

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \frac{K}{h} \cdot (z \cos n y - y \cos n z) \\ Y_n &= \frac{K}{h} \cdot z \cos n x \\ Z_n &= -\frac{K}{h} \cdot y \cos n x . \end{aligned}\right\} \qquad (93)$$

Bei willkürlicher Gestalt der Oberfläche verschwindet im Allgemeinen keine dieser drei Componenten, die äufseren Flächenkräfte werden also sowohl auf den Flächenelementen wie auf den Coordinatebenenrichtungen schief stehen. Eine Gesetzmäfsigkeit besteht indessen bei jeder Form der Oberfläche: Erweitern wir nämlich Y_n mit y, Z_n mit z und addiren beide Ausdrücke, so finden wir:

$$Y_n \cdot y + Z_n \cdot z = 0 .$$

Das ist aber die Bedingung für das Aufeinandersenkrechtstehen der beiden Vectoren (Y_n, Z_n) und (y, z), deren erster die Oberflächenkraft nach Wegnahme der X_n-Componente, also die Projection des Kraftpfeiles auf die (y, z)-Ebene, deren zweiter den Abstand r des Oberflächenelementes von der Torsionsaxe mifst. Die Oberflächenkräfte dürfen also nirgends streben, die angegriffenen Grenzflächen der Torsionsaxe näher oder ferner zu rücken, vielmehr werden die X_n sie nur parallel dieser Axe hinauf- oder hinabdrängen und die Y_n und Z_n werden sie nur um diese Axe herumdrehen. Der Sinn dieser Drehung ist aus den Gleichungen (93) abzulesen; er ist positiv, wo $\cos(n x)$ negativ, also der Winkel zwischen der inneren Normale und der positiven x-Axe stumpf ist, der Drehungssinn ist negativ, wo der Winkel (n, x) spitz ist. An allen Stellen der Oberfläche, welche prismatisch oder cylindrisch parallel der x-Axe verlaufen, müssen $Y_n = Z_n = 0$ sein, denn dort ist $\cos n x = 0$. Wichtig ist noch die Frage, wie die Oberflächenelemente liegen müssen, damit die Componente X_n verschwinde. Es mufs für solche $z \cdot \cos n y - y \cdot \cos n z = 0$ sein, oder

$$\frac{z}{y} = \frac{\cos(n z)}{\cos(n y)} .$$

Diese Proportion fordert, dafs die Normale n, nach der passenden Seite verlängert, die x-Axe schneidet, dafs also der Theil der Oberfläche, auf dem die gestellte Bedingung zutrifft, die Gestalt einer Umdrehungsfläche um die x-Axe besitzen mufs. Sollen endlich zur

Erzeugung der beschriebenen Torsion auf Theile der Oberfläche gar keine Kräfte wirken, also sowohl $X_n = 0$ als auch $Y_n = Z_n = 0$, so müssen diese Flächen sowohl drehrund als auch cylindrisch sein. Nur die Mantelflächen der um die x-Axe gelegten Kreiscylinder erfüllen beide Bedingungen. Mit ihnen werden wir uns im folgenden Paragraphen beschäftigen.

In der Praxis sucht man Torsionen in cylindrischen oder prismatischen Stäben immer dadurch zu erzeugen, daſs man nur auf die Endquerschnitte entgegengesetzt drehende Kräftepaare wirken läſst, die Mantelflächen aber frei sich selbst überläſst. Da erkennt man nun sofort nach dieser Ueberlegung, daſs ein Stab von nicht kreisförmigem Querschnitt (elliptisch, rechteckig etc.) durch solche Kräfte niemals die vorher beschriebene regelmäſsige Art der Torsion annehmen kann, denn um diese herzustellen, müſste man noch auf die Mantelflächen allenthalben die nachhelfenden Schubkräfte X_n in der Längsrichtung anbringen, welche die Oberflächentheile theils hinauf, theils hinabschieben. Der Ausdruck X_n läſst auch leicht Vorzeichen und Intensität für verschiedene Theile eines vorgeschriebenen Querschnittes erkennen, und daraus kann man dann einen Rückschluſs ziehen, welcher Art die Abweichungen von der reinen Torsion sein werden, wenn diese X_n-Kräfte fehlen. Für einen Stab mit rechteckigem Querschnitt z. B. gewinnt man hierdurch sehr leicht die Anschauung, daſs dessen ebene Querschnittsflächen durch die Torsion faltig verbogen werden müssen, so daſs jede der vier Seiten eine Hebung und eine Senkung zeigt, welche dann, sich verflachend, gegen die Mitte zusammenlaufen werden. Man kann also auch hier, ohne die schwierigere Aufgabe der zweiten Klasse zu lösen (nämlich die Deformation zu bestimmen, welche ein prismatischer Stab unter der Wirkung zweier an den Endflächen entgegengesetzt drehender Kräftepaare annimmt), das gefundene Resultat der einfacheren Aufgabe erster Klasse verwenden, um sich wenigstens über den Charakter der erzeugten Deformation bis in die Einzelheiten zu unterrichten.

Am Schluſs dieses Paragraphen sei noch darauf hingewiesen, daſs Fernkräfte auf die Masse zur Erzielung der regelmäſsigen Torsion nicht zu brauchen sind. Wir können uns hier nicht mehr auf § 36 berufen, denn unsere Deformation ist nicht in dem dort gebrauchten Sinne gleichförmig, da die Verrückungscomponenten (89) vom zweiten Grade sind. Bildet man aber deren zweite Differentialquotienten, wozu in Gleichung (89a) schon ein Schritt gethan ist, so sieht man sofort, daſs auch hier:

$$\varDelta \xi = \varDelta \eta = \varDelta \zeta = \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

ist, wie in Gleichung (72). In Bezug auf die verhältnifsmäfsig geringe Wirkung des Eigengewichtes gilt das Gleiche wie früher.

§ 42. Torsion eines Kreiscylinders.

Die Kreiscylinder sind, wie wir gesehen haben, die einzigen Körperformen, denen man die als reguläre Torsion beschriebene Deformation ertheilen kann, ohne dabei Kräfte auf die Mantelflächen ausüben zu müssen. Auf Körper von dieser Gestalt wollen wir nun die weiteren Untersuchungen über die tordirenden Kräfte beschränken. Wir denken uns also einen Kreiscylinder, begrenzt durch zwei gerade abgeschnittene Endflächen und erfüllt von homogener isotroper Substanz. Er befinde sich in der durch die Gleichungen (89) bis (91) definirten regulären Torsion und wir suchen die nöthigen äufseren Oberflächenkräfte, welche diesen Zustand aufrecht erhalten.

Die obere Grenzebene habe die Abscisse $x = 0$, die untere die positive Abscisse $x = p$. Zunächst wollen wir noch die Beschränkung beibehalten, es solle p klein gegen h sein, damit die Grundlagen der Gleichungen (89), dafs alle Verrückungen so gut wie geradlinig angesehen werden dürfen, erfüllt sei. Nachher werden wir das als überflüssig fallen lassen. Auf beiden Endflächen ist $\cos ny = \cos nz = 0$, mithin $X_n = 0$. Zug- oder Druckkräfte dürfen also dort nicht wirken. Sind trotzdem solche unvermeidlich, wie z. B. bei den Torsionswagen in Folge der Schwere der angehängten Schwingungskörper, so tragen sie jedenfalls nichts zur Torsion bei, sondern erzeugen die in § 40 betrachtete Spannung des Cylinders, um welche wir uns hier nicht zu bekümmern brauchen, da verschiedene neben einander bestehende Deformationen sich ungestört superponiren. An der oberen Endfläche geht die innere Normale n in Richtung der positiven x-Axe, es ist dort $\cos nx = +1$, mithin:

$$X_n = 0\,, \quad Y_n = +\frac{K}{h} z\,, \quad Z_n = -\frac{K}{h} y\,. \tag{94}$$

Die Resultante besitzt den absoluten Betrag:

$$R_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2} = \frac{K}{h}\sqrt{z^2 + y^2} = \frac{K}{h} \cdot r\,, \tag{94 a}$$

wächst also proportional dem Abstand von der Torsionsaxe. Ihre

Richtung steht senkrecht auf dem Radius r, ihr Drehungssinn ist eindeutig bestimmt durch die Vorzeichen der Componenten Y_n und Z_n: Für ein Flächenelement mit positivem y und z ist Y_n positiv, Z_n negativ, das bedeutet ein negatives Drehungsmoment. Ebenso ist es in den anderen Quadranten. Alle diese Kräfte drehen im gleichen Sinne, ihre Momente sind Vectoren von der gemeinsamen Richtung $-x$, können daher algebraisch summirt werden. Das geschieht durch Integration über die ganze Kreisfläche. Die Flächenelemente seien im Polarcoordinatensystem, Radius r, Azimuth α, abgetheilt. Ein einzelnes ist

$$ds = r \cdot dr \cdot d\alpha. \tag{95}$$

Die mechanische Kraft k, welche auf diese Fläche wirkt, ist $k = R_n \cdot ds$, oder nach (94 a) und (95)

$$k = \frac{K}{h} r^2 \, dr \, d\alpha. \tag{95 a}$$

Das Drehungsmoment dieser Kraft um die x-Axe findet man, indem man k multiplicirt mit dem Abstand der Linie in der die Kraft wirkt vom Mittelpunkt der Kreisscheibe, da aber die Kraft überall senkrecht auf dem Radius steht, so ist r gerade dieser Abstand und der Beitrag zum ganzen Drehungsmoment $\mathfrak{R}$ wird $-k \cdot r$, das Minuszeichen steht wegen des negativen Drehungssinnes. Ausführlich geschrieben giebt dies:

$$d\mathfrak{R} = -\frac{K}{h} r^3 \, dr \, d\alpha. \tag{95 b}$$

Dies müssen wir nun integriren zwischen den Grenzen $\alpha = 0$ und $\alpha = 2\pi$, $r = 0$ und $r = a$, wo a den Radius des begrenzenden Cylindermantels bedeutet.

Die Summe aller Drehungsmomente auf die Endfläche $x = 0$ wird also

$$\mathfrak{R}_o = -\frac{K}{h} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^a r^3 \, ds = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{K}{h} a^4. \tag{96}$$

An der unteren Endfläche $x = p$ geht die innere Normale entgegengesetzt der positiven x-Richtung, es ist dort $\cos nx = -1$, mithin $Y_n = -\frac{K}{h} z$, $Z_n = \frac{K}{h} y$. Die absoluten Werthe der Kräfte sind denen an der oberen Endfläche gleich, aber entgegengesetzt gerichtet, sie drehen im positiven Sinne. Die Integration über die ganze Fläche wird in gleicher Weise ausgeführt. Das gesammte Drehungsmoment $\mathfrak{R}_p$ wird also an dieser Endfläche:

$$\mathfrak{R}_p = +\frac{\pi}{2} \cdot \frac{K}{h} a^4. \tag{96a}$$

Die erforderlichen Drehungsmomente stellen sich also heraus als proportional dem Formmodul K (der Volummodul H oder die Kirchhoff'sche Zahl θ sind ohne Einfluſs), ferner proportional $\frac{1}{h}$, was die Stärke der Torsion angiebt; endlich wachsen sie in sehr starkem Maſse mit der Dicke des Cylinders, da sie proportional der vierten Potenz des Radius sind. Von der Länge des Cylinders sind sie durchaus unabhängig, eine wichtige Eigenschaft, aus welcher wir noch eine weitere Folgerung ziehen wollen. Wir denken zwei beliebige Querschnitte durch den tordirten Cylinder gelegt und betrachten nur das dazwischenliegende Gebiet als den in der vorgeschriebenen Deformation zu haltenden Körper, alles was auſserhalb liegt nur als Vorrichtung, um die nöthigen Kräfte auf dessen Endflächen zu übertragen. Dann ist klar, daſs auf den oberen Querschnitt von oben her das negative Drehungsmoment $\mathfrak{R}_o$ wirken muſs, auf den unteren Querschnitt von unten her das gleiche positive Drehungsmoment $\mathfrak{R}_p$, denn das Stück des Cylinders unterscheidet sich vom ganzen Cylinder nur durch seine verschiedene Länge; auf diese kommt es aber, wie wir aus den Formeln sahen, nicht an. Die gleichmäſsige Fortsetzung der Torsion jenseits eines als Endfläche angesehenen Querschnittes erzeugt also die erforderlichen Kräfte, und wir kommen so zu der Vorstellung, daſs sich in jedem Querschnitte des tordirten Cylinders zwei einander entgegengesetzt gleiche Drehungsmomente $\mp \frac{\pi}{2} \cdot \frac{K}{h} a^4$ in Folge des festen Zusammenhanges der Masse im Gleichgewicht halten.

Anstatt daher an den freien Endflächen unseres Cylinders direct irgend welche anderweitige Mittel anzuwenden zur Anstrengung der geeigneten Kräfte, kann man den Cylinder verlängern, das heiſst eventuell ein beliebig langes gleichartiges Stück fest anfügen (löthen, schweiſsen) und diese Verlängerung in dieselbe Torsion versetzen. So kann man zu Cylinderlängen von der Gröſsenordnung der Strecke h und noch weiter vorgehen, in welchen der Drehungswinkel τ endliche, ja beliebig groſse Werthe erreicht. Damit ist auch die Beschränkung auf geradlinige Verrückungen aufgehoben. Die Torsion reicht in ihrer Uniformität so weit, wie der Cylinder. Irgendwo mufs freilich jeder gerade Cylinder seinen Anfang und sein Ende finden, und dort müssen die Drehungsmomente durch äufsere Kraftwirkungen hergestellt werden, wozu man gewisser technischer Hülfsmittel bedarf. Man klemmt etwa die Enden des Cylinders durch Schrauben zwischen passende hohlcylindrische Backen. Diese Schraubenbacken sitzen in der Mitte von massiven Hebeln, an deren beiden Enden man genügend starke Kräftepaare leicht anbringen kann. Das eine Ende, gewöhnlich das obere, kann man auch festklemmen in einem sogenannt starren Halter, welcher mit dem Mauerwerk oder sonstigen hinreichend widerstandsfähigen Stützen verbunden ist. Das Drehungsmoment, welches, von dem anderen Ende ausgehend, sich durch den ganzen Cylinder fortpflanzt, findet dann im Ruhezustand von selbst sein Gleichgewicht in der Reaction, welche die kleinen Zerrungen in der Befestigung am starren Halter äufsern.

In den eingeklemmten Enden mufs, wie man leicht einsieht, die Deformation von dem Charakter der regelmäfsigen Torsion abweichen. Jedoch kann man annehmen, dafs bereits in Querschnitten, welche nur um eines Durchmessers Breite von den Klemmbacken abstehen, die regelmäfsige Torsion ohne merkliche Störung sich ausbildet. Um diese geringen Unvollkommenheiten der Torsion an den Enden unschädlich zu machen, benutzt man zu elastischen Messungen dieser Art Cylinder, deren Länge sehr bedeutend gegen den Radius ist. also runde Drähte, deren Länge p von der Gröfsenordnung h ist, deren unteres Ende daher auch bei kleiner Deformation um endliche Winkel τ gedreht erscheint, ebenfalls ein günstiger Umstand für die Messung.

Die Torsionsmessungen können dazu dienen, um den Formmodul K, den man mitunter direct Torsionsmodul nennt, im absoluten Mafse zu bestimmen. Nach der Gleichung (88) ist der Winkel τ, um welchen das untere Ende $x = p$ eines Drahtes gedreht ist, ausgedrückt durch $\tau = \frac{p}{h}$, daraus kann man als Mafs für die Stärke der Torsion herleiten:

$$\frac{1}{h} = \frac{\tau}{p}. \tag{97}$$

Setzt man dies in die Gleichung (96a) für das Drehungsmoment ein, so kommt

$$\mathfrak{N}_p = \frac{\pi}{2} \frac{K a^4}{p} \cdot \tau. \tag{97a}$$

Die Länge p und den Radius a des Drahtes hat man vor oder nach dem Versuch zu bestimmen. Der Drehungswinkel τ und das Moment des angestrengten Kräftepaares (Kraft mal Hebelarm) $\mathfrak{N}_p$ sind durch Beobachtung festzustellen, dann ist in vorstehender Gleichung K die einzige Unbekannte, kann also berechnet werden. Da es namentlich auf die genaue Bestimmung von a ankommt (wegen der vierten Potenz, welche jeden Fehler vervierfacht), wird der Dickenmessung mit Taster oder Sphärometer mitunter die Wägung der Drahtlänge p vorzuziehen sein. Das Volumen des Cylinders ist $\pi a^2 p$, also die Masse

$$m = \pi a^2 p \mu,$$

wo μ die Dichtigkeit der Substanz bedeutet. Wenn man

$$a^2 = \frac{m}{\pi p \mu}$$

in (97a) einsetzt und K berechnet, so kommt:

$$K = 2\pi \frac{p^3 \mu^2}{m^2} \cdot \frac{\mathfrak{N}_p}{\tau}. \tag{97b}$$

Die rechts stehenden Gröfsen sind alle verhältnifsmäfsig leicht mit ausreichender Genauigkeit festzustellen.

Die Methode ist eine statische und leidet unter dem Uebelstande der elastischen Nachwirkung. Läfst man nämlich einen festen Torsionswinkel τ längere Zeit bestehen, so nimmt das dazu erforderliche Moment $\mathfrak{N}_p$ allmählich etwas ab; läfst man aber ein unveränderliches Kräftepaar längere Zeit wirken, so nimmt der Torsionswinkel allmählich etwas zu und geht nach Aufhebung der Torsion nicht sogleich auf Null zurück. Dadurch kommt eine gewisse Unsicherheit in die Winkelablesungen.

Eine andere Methode, welche die drehenden Schwingungen eines an dem Drahte befestigten Körpers von verhältnifsmäfsig grofsem Trägheitsmoment benützt, ist diesem Uebelstande in weit geringerem Mafse ausgesetzt, denn die Torsion des Drahtes findet dabei abwechselnd in entgegengesetzter Richtung statt, so dafs sich die elastischen Nachwirkungen gegenseitig wieder zum gröfsten Theile aufheben.

Wir wollen die Bewegungsgesetze solcher Schwingungen aufsuchen, welche durch den Widerstand gegen Torsion eines Aufhängungsdrahtes erzeugt werden. Streng genommen bildet der am oberen Ende starr befestigte Draht mit dem unten festgeklemmten Körper ein zusammengehöriges elastisches Massensystem von verwickelter Gestalt, dessen Bewegungen aus einem gegebenen Anfangszustand berechnet werden müssen. Indessen erlauben die besonderen Gröfsenverhältnisse, die man dem Apparate zu geben pflegt, eine stark vereinfachte Betrachtung. Die Trägheit der Drahtmasse darf gegen die des befestigten Körpers völlig vernachlässigt werden, und die Deformation des massiven Körpers darf gegen die des Drahtes vernachlässigt werden. Man hat also die Bewegung eines starren Körpers zu suchen, welcher um eine feste verticale Axe, die Drahtaxe, frei drehbar ist und auf welchen vom Drahte her dasjenige Drehungsmoment ausgeübt wird, welches dem Ablenkungswinkel τ nach Gleichung (97a) entspricht. Es ist dabei angenommen, dafs der tordirte Draht sich jederzeit unendlich nahe einem Gleichgewichtszustand befindet, dafs also der träge Körper durch seine Schwerbeweglichkeit stets das volle Drehungsmoment $\mathfrak{R}_p$ auf das untere Drahtende ausübt, ganz so wie auch die Einklemmung des oberen Endes in einen unbeweglichen Halter das Moment $\mathfrak{R}_o$ erzeugt.

Diese Annahme ist unbedenklich. Würde man nämlich das untere Drahtende unbelastet frei lassen, so dafs dort auch kein Drehungsmoment angreift, so würden nach einer als Anfangszustand erzeugten Torsion sehr schnelle Torsionsschwingungen erfolgen, welche bei Meter-Länge und Millimeter-Radius einen hohen Ton von vielen Hundert Schwingungen in der Secunde erzeugen. Die Schwingungen eines Körpers von gehörigem Trägheitsmoment unter der Torsionswirkung des Drahtes bemessen sich aber nach ganzen Secunden: So langsamen Deformationsänderungen gegenüber darf man von Gleichgewicht zwischen dem Stress des Drahtes und den äufseren Oberflächenkräften sprechen. Wenn also der träge Körper das Moment $\mathfrak{R}_p$ ausübt, so treibt das Ende des tordirten Drahtes den Körper mit dem umgekehrten Moment $-\mathfrak{R}_p$ oder $\mathfrak{R}_o$ in die Lage zurück, in der $\tau = 0$ ist.

Die Bewegung eines starren Körpers um eine feste Axe wurde im ersten Bande dieser Vorlesungen behandelt (vergl. Bd. I, § 47, namentlich Seite 190—192) und wir können uns hier darauf beziehen. Die sogenannte Directionskraft D eines Drehungsmomentes, welches proportional der Gröfse des Ablenkungswinkels τ in die

Ruhelage zurücktreibt, ist hier der Factor von τ in dem Ausdruck $\mathfrak{R}_p$, Gleichung (97a)

also

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{\pi}{2}\frac{K a^4}{p} \\ \mathfrak{R}_o &= -D\cdot\tau. \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Das bekannt vorausgesetzte Trägheitsmoment des Körpers um die Drahtaxe nennen wir Θ. (Wie dieses experimentell, z. B. durch Zulegung neuer Belastungen bestimmt werden kann, ist ebenfalls an jener Stelle des ersten Bandes angegeben.) Die Differentialgleichung der Schwingungen ist dann

$$\Theta\cdot\frac{d^2\tau}{dt^2} = -D\cdot\tau\cdot \tag{98a}$$

t ist die Zeit. Das vollständige Integral ist:

$$\tau = A\cdot\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right). \tag{98b}$$

Hier ist A die willkürliche endliche Amplitude der Schwingungen, φ eine willkürliche Phasenconstante, welche von den Zeitpunkten des Durchganges durch die Ruhelage abhängt; die Periode T aber ist nicht willkürlich, sondern gegeben durch

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D}}\cdot \tag{98c}$$

Man kann diesen Ausdruck leicht verificiren, indem man das Integral zweimal nach t differenzirt und in die Differentialgleichung einsetzt. Nun wollen wir noch aus Gleichung (98) den Ausdruck für die Directionskraft einsetzen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2p\Theta}{\pi K a^4}}$$

und daraus den Formmodul berechnen:

$$K = \frac{8\pi p\Theta}{a^4\cdot T^2}. \tag{98d}$$

Alle rechtsstehenden Gröſsen sind meſsbar. Statt a^4 kann man Masse und Dichtigkeit des Drahtes einführen, wie in Gleichung (97b); man erhält dann:

$$K = 8\pi^3 \cdot \frac{p^3 \mu^2}{m^2} \cdot \frac{\Theta}{T^2}. \tag{98e}$$

Die Periode T, deren Quadrat eingeht, läſst sich sehr genau mit einer Normaluhr vergleichen, da diese langsamen Schwingungen sehr schwach gedämpft sind, stundenlang anhalten und in ihrer Zeitdauer von der allmählich sich vermindernden Amplitude unabhängig sind. Man bestimmt aus einigen auf einander folgenden Schwingungen einen Näherungswerth von T und den absoluten Zeitpunkt eines Durchganges durch die Ruhelage. Beobachtet man dann nach etwa einer Stunde wieder den Zeitpunkt eines Durchganges, so muſs die inzwischen verstrichene lange Zeit ein hohes Multiplum der Periode sein; welches? läſst sich aus dem Näherungswerth T zweifellos feststellen, und man gewinnt so einen sehr sicheren Werth für T. Vor Luftströmungen muſs man den Schwingungskörper schützen durch Einschluſs in einen Kasten.

§ 43. Biegung.

Wir wollen nun als letzte Aufgabe der ersten Klasse die Biegung eines nicht zu groſsen Theiles aus der Mitte eines stabförmigen Körpers betrachten. Auf die Art, wie die Biegung zu Stande gekommen ist, wollen wir uns zunächst nicht einlassen, sondern vor allem den Charakter dieser besonderen Deformation veranschaulichen. Um sogleich bestimmte Vorstellungen zu gewinnen, denken wir uns einen rechtwinklig beschnittenen, länglichen isotropen Körper. In dessen Mittelpunkt legen wir den Coordinatenursprung, in die Längsrichtung nach rechts die positive x-Axe, in die horizontale Querrichtung nach vorn die positive y-Axe, vertical nach unten die positive z-Axe. Die Biegung dieses Körpers soll darin bestehen, daſs er in der Längsrichtung ein wenig gekrümmt wird, concav nach unten. Denken wir den Körper in Längsfasern zerlegt, so folgt aus dieser Vorstellung, daſs die Fasern in der oberen Hälfte gedehnt, in der unteren verkürzt werden, und zwar um so stärker, je weiter sie von der horizontalen Mittelebene abstehen, je gröſser also ihre z-Abmessung ist. Die horizontalen Längsverrückungen ξ, welche einerseits proportional der x-Abmessung nach beiden Enden hin zunehmen müssen, werden auch noch proportional z zu setzen sein, man kann daher mit Hülfe eines absoluten Factors α schreiben:

$$\xi = -\alpha \cdot x z. \tag{99}$$

Das Minuszeichen giebt den richtigen Sinn dieser Verrückungen. Denn bleiben wir auf der rechten Stabhälfte ($x > 0$), so haben wir für positives z ein negatives ξ. Die Massenpunkte rücken in der unteren Hälfte nach links also dichter zusammen. In der oberen Hälfte rechts wird ξ positiv, Verrückung nach rechs, Dehnung der Längsfasern. Für die linke Stabhälfte gilt das Gleiche.

Wir zielen nun bei unserer Darstellung der Biegung gleich auf solche Verhältnisse hin, indem auf die langen, mit x parallelen Seitenflächen keine Kräfte wirken, und werden deshalb vermuthen, dafs ähnlich wie bei gespannten Drähten, in den gedehnten Fasern der oberen Stabhälfte eine Quercontraction sich einstellt, in den geprefsten Fasern der unteren Hälfte aber eine seitliche Schwellung. Das bedeutet aber für horizontale Querfasern parallel der y-Axe in der unteren Hälfte Dehnung, also η von gleichem Vorzeichen wie y, in der oberen Hälfte Zusammenziehung, also η ungleichstimmig mit y, im Uebrigen erstens proportional mit y und aufserdem auch noch um so gröfser, je weiter abstehend von der horizontalen Mittelebene. All dem trägt man Rechnung, wenn man mit Hülfe eines zweiten absoluten Factors β ansetzt

$$\eta = + \beta \cdot y z. \tag{99 a}$$

Von abweichender Gestalt ist die Verrückung ζ. Die z-Richtung nimmt überhaupt eine Sonderstellung bei dieser Deformation ein: Die beiden verticalen Mittelebenen normal auf x und y sind Symmetrieebenen, d. h. die rechte und linke Hälfte, wie auch die vordere und hintere Hälfte der Deformation sind wie Spiegelbilder von einander. Die horizontale Mittelebene normal auf z aber ist ist keine Symmetrieebene. Die augenfälligste Erscheinung der Biegung besteht darin, dafs die Punkte sowohl rechts wie links nach unten gerückt erscheinen, so dafs eine stetige schwache Krümmung der x-Fasern entsteht. Da wir uns auf Ausdrücke zweiten Grades beschränken wollen, können wir dies nur dadurch ausdrücken, dafs wir in der verticalen Verrückung ζ ein positives Glied ansetzen, welches proportional mit x^2 zunimmt, also mit Hülfe eines absoluten Factors γ dieses Glied setzen $+ \gamma \cdot x^2$. Für die in der x-Axe selbst gelegenen Punkte ist dies bereits die vollständige Verrückung, aber für andere kommen noch weitere Glieder hinzu, welche auf die Quercontraction der oberen und Querdilatation der unteren Hälfte zurückzuführen sind. Diese bewirkt in der oberen Hälfte ein Zusammensinken, in der unteren ein Herabquellen der Massen, also sowohl in der oberen wie in der unteren Hälfte ohne Zeichenwechsel ein mit dem absoluten Werthe von z zunehmendes positives ζ, dieser Antheil kann daher nur proportional mit z^2 angenommen werden. Endlich werden die Querfasern parallel y auch gekrümmt, aber concav nach oben, das giebt für positives wie negatives y eine seitliche Hebung, ein negatives ζ, welches nur proportional mit $-y^2$ sein kann. Im Ganzen werden wir also mit Hülfe von zwei weiteren absoluten Factoren δ und ε ansetzen

$$\zeta = \gamma \cdot x^2 - \delta \cdot y^2 + \varepsilon \cdot z^2. \tag{99 b}$$

Die vorstehende Herleitung der drei Formeln für die Verrückungscomponenten soll nicht den Anspruch an eine mathematische Deduction befriedigen. Wir haben dabei nur den sinnlichen Eindruck, den die Beobachtung der Biegung uns macht, in analytische Ausdrücke gefaſst, die den zweiten Grad nicht übersteigen. Diese analytische Fassung der Verrückungen ist überhaupt bei den Aufgaben der ersten Klasse, deren weitere Behandlung so überaus einfach sich gestaltet, die einzige Schwierigkeit. Uebrigens sind die hier gewonnenen Ausdrücke für ξ, η, ζ noch sehr unbestimmt, denn wir haben nicht weniger als fünf unbestimmte Factoren α, β, γ, δ, ε dazu einführen müssen, während doch einleuchtet, daſs die Biegung, so lange sie klein und von gleichem Charakter, nur der Stärke nach verschieden ist, durch einen einzigen Intensitätsfactor bestimmt sein muſs. Diese Zurückführung der fünf Coefficienten auf einen und damit die Präcisirung der Natur der Deformation werden wir durch die Betrachtung der dazu erforderlichen Kräfte gewinnen.

Zunächst müssen wir die Straindaten berechnen. Die Differentialquotienten der ξ, η, ζ sind leicht zu bilden:

$$\left.\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = -\alpha z & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} = +2\gamma x \\[2ex]
\dfrac{\partial \xi}{\partial y} = 0 & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = +\beta z & \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} = -2\delta y \\[2ex]
\dfrac{\partial \xi}{\partial z} = -\alpha x & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} = +\beta y & \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} = +2\varepsilon z.
\end{array}\right\} \tag{100}$$

Daraus folgt nach (10 a'):

$$\left.\begin{array}{lll}
a = -\alpha z & b = +\beta z & c = +2\varepsilon z \\
2l = (\beta - 2\delta) y & 2m = (2\gamma - \alpha) x & 2n = 0 \\
2\lambda = -(\beta + 2\delta) y & 2\mu = -(\alpha + 2\gamma) x & 2\nu = 0.
\end{array}\right\} \tag{100 a}$$

Drehungen der Theilchen sind also vorhanden, die Drehung μ um die y-Axe ist eine Folge der nach unten concaven Krümmung der x-Fasern, die Drehung λ um die x-Axe rührt her von der nach oben concaven Krümmung der y-Fasern. Das Minuszeichen giebt in beiden Fällen den richtigen Sinn der Drehung an. Um die verticale z-Axe tritt keine Drehung ein.

Nun bilden wir aus dem Strain auf Grund der Gleichungen (65) und (65 a) den Stress:

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= 2K\alpha z - 2K\theta(-\alpha+\beta+2\varepsilon)z \\
Y_y &= -2K\beta z - 2K\theta(-\alpha+\beta+2\varepsilon)z \\
Z_z &= -4K\varepsilon z - 2K\theta(-\alpha+\beta+2\varepsilon)z \\
Y_z &\equiv Z_y = -K(\beta-2\delta)y \\
Z_x &\equiv X_z = -K(2\gamma-\alpha)x \\
X_y &\equiv Y_x = 0\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (101)$$

Die Entscheidung der Frage, ob Massenkräfte aus der Ferne betheiligt sein dürfen oder müssen, um die von uns aufgestellte Form der Biegung aufrecht zu erhalten, hängt von den zweiten Differentialquotienten der Verrückungen ab. Ein Blick auf die Gleichungen (100) lehrt, dafs zwar auf jeden Fall $\Delta\xi = \Delta\eta = \frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial y} = 0$ ist, dafs also horizontale Fernkräfte nicht wirken dürfen; dagegen findet man aber

$$\begin{aligned}
\Delta\zeta &= 2(\gamma-\delta+\varepsilon) \\
\frac{\partial\omega}{\partial z} &= -\alpha+\beta+2\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Es sind also verticale Massenkräfte nöthig von der Intensität (pro Volumeinheit)

$$\mu Z = -2K(\gamma-\delta+\varepsilon) - K(1+2\theta)\cdot(-\alpha+\beta+2\varepsilon). \qquad (102)$$

Wenn wir nun die Oberflächenkräfte suchen, so wird die Gestalt der Begrenzung des Körpers von Wichtigkeit. Dafs wir ihn im Vorangehenden bereits als rechteckigen Stab vorgestellt haben, geschah nur aus Bequemlichkeit; der Charakter der Verrückungen (99), (99 a), (99 b), mithin auch der Strain nebst Drehungen (100 a) und der Stress (101) und die Fernkräfte (102) könnten in gleicher Weise für einen anders gestalteten Körper gefordert werden. Die Normalen auf den sechs rechteckigen Begrenzungsflächen laufen in Richtung der positiven oder negativen Coordinataxen. Von den in den Gleichungen (40 a) vorkommenden Cosinus werden also immer zwei gleich Null, der dritte gleich ± 1, so dafs man die nöthigen Oberflächenkräfte direct aus den Gleichungen (101) ablesen kann, wenn man für x, y, z dabei die für die Begrenzungsflächen geltenden Werthe einsetzt.

Nun stellen wir die Forderung, dafs die Biegung erzeugt werden kann, ohne dafs man nöthig hat, auf den vier Seitenflächen (normal zu y und z) irgend welche Flächenkräfte anzubringen. Es müssen also in (101) alle Stresscomponenten mit den Indices y und z gleich Null sein. Das trifft $X_y\, Y_y\, Z_y\, X_z\, Y_z\, Z_z$, und wegen der paarweisen Gleichheit mit zweien der angeführten auch Y_x und Z_x. Es bleibt bei dieser Forderung also nur X_x allein als von Null verschieden übrig. Das Verschwinden der übrigen bringt nun erst die nöthige Bestimmtheit in den Charakter der beschriebenen Deformation. Die Forderung $X_y \equiv Y_x = 0$ liefert keine neue Bedingung, denn diese beiden sind bereits in (101) auf alle Fälle als Null erkannt. Ferner sind $Y_z = 0$ und $Z_y = 0$ als zwei Forderungen aufgezählt, während nur eine darin steckt. Es bleiben also vier unabhängige Bedingungen übrig, welche verlangen, dafs die Ausdrücke in der zweiten, dritten, vierten und fünften Zeile in (101) verschwinden. Hebt man gemeinsame Factoren $-K$, x, y, z fort, so erhält man folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
\beta + \theta\cdot(-\alpha+\beta+2\varepsilon) &= 0\\
2\varepsilon + \theta\cdot(-\alpha+\beta+2\varepsilon) &= 0\\
\beta - 2\delta &= 0\\
2\gamma - \alpha &= 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (103)$$

welche man benützen kann, um vier der unbestimmten Factoren durch den fünften auszudrücken. Wir wollen den Factor γ beibehalten, weil dieser die Stärke der Biegung am anschaulichsten bezeichnet, indem er die Krümmung der Stabaxe durch die Gleichung $\zeta = \gamma x^2$ direct zum Ausdruck bringt. Die Behandlung der 4 Relationen (103) ist sehr einfach. Aus der letzten folgt:

$$\alpha = 2\gamma,$$

aus der vorletzten

$$\beta = 2\delta,$$

aus den beiden ersten durch Subtraction

$$\beta = 2\varepsilon,$$

mithin auch noch

$$\delta = \varepsilon.$$

Die zweite Gleichung allein liefert dann:

$$2\varepsilon + \theta(-2\gamma + 4\varepsilon) = 0,$$

woraus folgt

$$\varepsilon = \frac{\theta}{1 + 2\theta}\gamma.$$

Der Complex $\frac{\theta}{1 + 2\theta}$ ist uns schon früher begegnet als Ausdruck für die Poisson'sche Zahl μ, welche die Quercontraction eines longitudinal gedehnten Cylinders anzeigt; vergl. die Tabelle (87) auf S. 153. Das Auftreten von μ an dieser Stelle ist begreiflich, da wir es auch hier mit Längsspannung von Fasern ohne Querkräfte zu thun haben. Wir wollen die Bezeichnung μ auch hier benutzen (nicht zu verwechseln mit der mittleren der Drehungscomponenten λ, μ, ν!). Die Resultate aus den Gleichungen (103) lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 2 \cdot \gamma \\ \beta &= 2\mu \cdot \gamma \\ \delta = \varepsilon &= \mu \cdot \gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (103\text{a})$$

Durch sie wird das Wesen unserer Biegung eindeutig charakterisirt. Doch wollen wir die Besonderheiten, die dadurch die Deformation erhält, erst im nächsten Paragraphen betrachten und uns zunächst um die Kräfte bekümmern, welche nun nöthig sind. Zunächst die Massenkraft, welche durch (102) gegeben ist: Die Massendichtigkeit wollen wir hier durch μ' bezeichnen, um Verwechselung mit dem Poisson'schen μ auszuschließen. Es wird:

$$\begin{aligned} \mu' Z &= -2K\gamma - K(1 + 2\theta) \cdot (-2\gamma + 4\mu\gamma) \\ &= -2K\{1 - (1 + 2\theta)(1 - 2\mu)\} \cdot \gamma. \end{aligned}$$

Ein Blick auf zwei reciproke Formeln der Tabelle (87) lehrt, daß $(1 + 2\theta) = \frac{\theta}{\mu}$ und $(1 - 2\mu) = \frac{\mu}{\theta}$, mithin $(1 + 2\theta)(1 - 2\mu) = 1$ ist. Die geschweifte Klammer ist identisch gleich Null, also:

$$\mu' Z = 0. \qquad (104)$$

Diese einfachste Form der Biegung, welche wir jetzt herausgefunden haben, kommt also ohne Mitwirkung von Massenkräften zu

Stande. Wenn der horizontal liegende Stab nicht zu lang ist, darf man die Schwerkraft vernachlässigen. Bei sehr langen oder sehr dünnen Stäben ist das freilich nicht mehr zulässig; da treten auch merkliche Biegungen in Folge des Eigengewichtes auf. Diese Erscheinungen sollen hier nicht betrachtet werden, obwohl es gelungen ist, sie theoretisch zu behandeln.

Die einzig übrigbleibenden Kraftwirkungen sind also die dem Stress X_x das Gleichgewicht haltenden Druck- oder Zugkräfte auf die Endflächen des Stabes. Setzt man die Werthe aus (103a) in die erste der Gleichungen (101) ein, so findet man

$$\begin{aligned} X_x &= 4K\gamma z - 2K\theta(-2\gamma + 4\mu\gamma)z \\ &= 4K\gamma \cdot z \cdot \{1 + \theta(1 - 2\mu)\}. \end{aligned}$$

Nach einer schon benützten Formel der Tabelle (87) ist aber $\theta \cdot (1 - 2\mu) = \mu$, und nach der darüberstehenden (links oben in der Ecke) ist:

$$2K \cdot (1 + \mu) = E.$$

Unser Ausdruck vereinfacht sich zu:

$$X_x = 2E\gamma z. \tag{105}$$

Die elastischen Constanten treten hier zusammen zu demselben Complex E, den wir bereits als Widerstand gegen Longitudinalspannung von Drähten gefunden haben: Das ist ebenso einleuchtend wie das Auftreten von μ. An der linken Endfläche, wo die innere Normale der positiven x-Richtung folgt, liefert vorstehender Ausdruck direct die Oberflächenkraft, an der rechten Endfläche ist letztere

$$X_{-x} = -2E\gamma z. \tag{105a}$$

Von der Länge des Stabes und von seiner horizontalen Breite sind diese Kräfte unabhängig, denn die Abmessungen x und y gehen nicht ein in den Ausdruck; dagegen sind sie proportional der z-Coordinate, welche auf der unteren Hälfte positiv, auf der oberen negativ ist. Diese Kräfte bedeuten auf beiden Unterhälften der Endflächen Druck, auf beiden Oberhälften Zug, beide zunehmend proportional dem Abstand von der horizontalen Mittellinie dieser Endflächen. Daraus erkennt man, dafs die Wirkungen auf die einzelnen Flächenelemente sich zu reinen Kräftepaaren zusammensetzen, deren Axe in beiden Endflächen parallel der y-Axe liegt. Wegen der Unabhängigkeit der Kräfte von y kann man als Flächenelemente sogleich Streifen einführen über die ganze horizontale Breite der rechteckigen Endflächen. Diese Breite sei $2q$, die Höhe der Streifen sei das Differential dz. Die Fläche eines Streifens ist dann

$$ds = 2q \cdot dz,$$

und die gesammte normal darauf wirkende mechanische Kraft ist auf der linken Endfläche:

$$k = X_x \cdot ds = 4 E \gamma q z dz.$$

Fassen wir nun zwei Streifen zusammen, welche gleich weit von der Mittellinie abstehen, so haben diese absolut gleiches z, der untere positives, der obere negatives z, der Abstand der Kraftlinien ist $2z$. Die Kräfte auf diese beiden Streifen bilden zusammen ein Kräftepaar vom Moment:

$$d\mathfrak{N} = 2z \cdot k = 8 E \gamma q z^2 dz.$$

Das Vorzeichen mufs positiv gewählt werden, da die positive y-Axe nach dem Beschauer hin, der obere Kraftpfeil nach links, der untere nach rechts weist. Um das gesammte Drehungsmoment an dieser Endfläche zu finden, müssen wir über sämmtliche Streifenpaare integriren. Nennen wir die Dicke des Stabes $2r$, so dafs die Grenzen $-r < z < +r$ gelten, so haben wir $d\mathfrak{N}$ von 0 bis r zu integriren

$$\mathfrak{N} = 8 E \gamma q \int_0^r z^2 dz = \frac{8}{3} E \gamma \cdot q \cdot r^3. \tag{106}$$

Auf der rechten Endfläche gestaltet sich die Berechnung des gesammten Drehungsmomentes ganz ebenso, nur drehen dort alle Kräftepaare im umgekehrten Sinne; man erhält daher denselben absoluten Werth, mufs aber das Rotationsmoment negativ bezeichnen.

Die Berechnung des Biegungsmomentes, welche wir eben für einen Stab mit rechteckigem Querschnitte $(2q \times 2r)$ durchgeführt haben, läfst sich in ähnlicher Weise auch für prismatische oder cylindrische Stäbe von anderer Form machen. Zunächst sieht man leicht ein, dafs beim Fehlen von äufseren Kräften auf die Mantelflächen in allen Fällen nur der Stress X_x, welcher durch Gleichung (105) gegeben ist, wirksam ist, dafs also nur Druck und Zugkräfte auf die Endflächen gefordert werden, welche sich bei geeigneter

Höhenlage der horizontalen Coordinatebene auf beiden Enden zu reinen Kräftepaaren vereinigen lassen. Für einen kreisförmigen Querschnitt soll diese Berechnung hier noch durchgeführt werden. Wir zerlegen die Endflächen in schmale horizontale Streifen, deren Länge in der y-Richtung jetzt freilich nicht constant ist, sondern durch den Radius a des Kreises und die Höhenlage z in der Form $2 \cdot \sqrt{a^2 - z^2}$ ausgedrückt wird. Die Breite der Streifen ist dz, die Fläche daher $ds = 2\sqrt{a^2 - z^2} \cdot dz$. Die mechanische Kraft auf einen solchen Streifen der linken Endfläche liegt in der x-Richtung und hat den Werth:

$$k = X_x \cdot ds = 4 E \gamma z \sqrt{a^2 - z^2}\, dz.$$

Fassen wir zwei Streifen mit entgegengesetzt gleichem z zusammen, so bilden die Kräfte ein um die y-Axe rechtsdrehendes Paar, dessen Moment ist

$$d\mathfrak{R} = k \cdot 2z = 8 E \gamma z^2 \sqrt{a^2 - z^2}\, dz.$$

Um das gesammte Drehungsmoment zu erhalten müssen, wir sämmtliche $d\mathfrak{R}$ summiren, das heifst von $z = 0$ bis $z = a$ integriren:

$$\mathfrak{R} = 8 E \gamma \int\limits_0^a z^2 \sqrt{a^2 - z^2}\, dz.$$

Das Integral kann man nach elementarer Methode der Integralrechnung in unbestimmter Form ausführen; man findet:

$$8 \int z^2 \sqrt{a^2 - z^2}\, dz = (2z^3 - a^2 z) \sqrt{a^2 - z^2} + a^4 \arcsin \frac{z}{a} \cdot$$

Setzt man hier die Grenzen ein, um $\int\limits_0^a$ zu bilden, so fällt das algebraische Glied fort, weil an der oberen Grenze die Quatratwurzel, an der unteren die Klammer mit dem Factor z verschwindet; an der unteren Grenze verschwindet auch der Arcussinus, während dieser an der oberen Grenze den Werth $\frac{\pi}{2}$ annimmt. Das bestimmte Integral hat also den Werth $\frac{\pi}{2} a^4$ und wir erhalten

$$\mathfrak{R} = \frac{\pi}{2} E \gamma a^4. \tag{107}$$

An der rechten Endfläche mufs natürlicherweise das entgegengesetzt gleiche, linksdrehende Moment angreifen. Die Formel (107) zeigt eine bemerkenswerthe Aehnlichkeit mit derjenigen für das zur Torsion eines Kreiscylinders erforderliche Drehungsmoment (96a). Dort der Modul K, hier E, dort das Torsionsmafs $\frac{1}{h}$, hier das Biegungsmafs γ, sonst der gleiche Factor $\frac{\pi}{2}a^4$. Wir werden diesen Analogien zwischen Torsion und Biegung im folgenden noch begegnen.

In Stäben, welche durch räumlich getrennte entgegengesetzte Drehungsmomente der eben berechneten Art in der geforderten Biegung erhalten werden, kann man ganz analog, wie bei tordirten Cylindern, annehmen, dafs sich auf jedem mittleren Querschnitt zwei entgegengesetzte Drehungsmomente in Folge des festen Zusammenhanges der Substanz im Gleichgewicht halten. Legt man zwei ideale Querschnitte durch den Stab und betrachtet nur das dadurch eingeschlossene Stück als den zu deformirenden Körper, alle aufserhalb liegenden Theile aber nur als Hülfsmittel zur Anbringung der geeigneten Kräfte auf diese idealen Stabenden, so erkennt man, dafs die gleichmäfsige Fortsetzung der Deformation jenseits der gedachten Endflächen diese Kräfte erzeugt, dafs sich also in jedem Querschnitte des Stabes die beiden entgegengesetzten Drehungsmomente vom Betrage $\mathfrak{R}$ im Gleichgewichte halten. Irgendwo mufs aber der Stab seine natürlichen Enden finden und dort müssen äufsere Einwirkungen die erforderlichen Kräftepaare hervorbringen.

Die technischen Einrichtungen, welche diesem Zwecke dienen, erzeugen nun meistens in ihrer nächsten Nähe unregelmäfsige Deformationen, welche sich erst in einigem Abstande so weit ausgleichen, dafs die von uns gewünschte einfachste Form der Biegung als erfüllt gelten darf. Man wird daher gut thun zum Zwecke elastischer Messungen an gebogenen Stäben, bei denen gerade diese Art der Biegung vorausgesetzt wird, nicht zu nahe an die Angriffspunkte der äufseren Kräfte heranzugehen, sondern sich mehr in der Mitte zu halten. Unter den technischen Hülfsmitteln um die beiden geforderten Drehungsmomente auf die Endflächen auszuüben, steht folgendes den theoretischen Voraussetzungen am nächsten: Man befestigt die Enden des horizontal gedachten Stabes in zwei starken verticalen Hebeln, welche gegen den Stab als starr gelten dürfen. An deren Enden kann man die Kräftepaare anbringen, indem man die unteren Hebelenden durch äufsere Gewalt einander nähert, und die oberen Hebelenden ebenso gewaltsam aus einander treibt. Alsdann wird man bereits in geringer Entfernung von den befestigten Enden die gewünschte reguläre Biegung vorfinden. Statt des einen Hebels kann man auch eine unbeweglich starre Einklemmung des Stabes benützen. Es gelingt übrigens auch ohne solche Hebel, die erwünschten Drehungsmomente zu erzeugen, wenn nur der Stab jenseits des betrachteten Bereiches noch ausreichend lange Enden besitzt, diese Fortsätze selbst spielen dann die Rolle der beiden Hebel; sie stehen zwar nicht vertical, sondern horizontal, man kann ihnen aber — und darauf kommt es an — ebenfalls Kräftepaare einprägen, welche um die horizontale Queraxe y drehen. So verfährt man z. B., wenn man einen Stab mit den Daumen und Zeigefingern beider Hände biegt: Man stemmt die Daumen gegen die untere Fläche des Stabes, legt die Zeigefinger weiter nach den Enden zu auf die Oberseite und dreht dann beide Handgelenke so, dafs die inneren Handflächen einander zugekehrt sind. Hierbei übertragen die Finger die äufseren Kräfte allerdings auf die Mantelflächen des Stabes und nicht auf die freien Enden, darum wird auch an den angefafsten Stellen die Biegung eine andere sein, als wir hier fordern, aber die Kräftepaare „Daumen-Zeigefinger“ werden in beiden Händen erzeugt und bekämpfen sich in allen mittleren Querschnitten. An Stelle der menschlichen Hände kann man andere Mittel anwenden, welche dasselbe leisten: Statt der beiden Daumen zwei feste Unterlagen oder Aufhängungsschlingen, statt der Zeigefinger zwei symmetrische Belastungen der Stabenden. Die Mitte des Stabes wird dann in einiger Ausdehnung die geforderte Art der Biegung zeigen, deren geometrischen Charakter wir nun näher betrachten wollen.

§ 44. Fortsetzung. Cornu's Methode der Messung von μ.

Wir wollen nun die im Vorhergehenden durch γ charakterisirte Art der Biegung auf ihre Erscheinung hin betrachten und setzen zu dem Zwecke die Werthe für α, β, δ, ε aus (103a) in (99) bis (99b) ein. Wir finden

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -2\gamma\cdot xz \\ \eta &= +2\mu\gamma\cdot yz \\ \zeta &= \gamma\cdot(x^2 - \mu y^2 + \mu z^2) \end{aligned}\right\} \qquad (108)$$

als Gesetze, welche die Verrückungen eines jeden Massenpunktes als Functionen seiner natürlichen Ruhelage (x, y, z) angeben. Die verrückte Lage während der Biegung hat dann die Coordinaten:

$$x' = x + \xi, \qquad y' = y + \eta, \qquad z' = z + \zeta\cdot \qquad (109)$$

Wir beginnen die Discussion mit der Frage: Was wird aus einer geradlinigen Punktreihe (Faser) parallel zur x-Axe?

Alle Punkte derselben Reihe besitzen die nämliche y- und z-Abmessung, während die x-Abmessung für jeden verschieden ist. Nennen wir die Constanten für eine gewisse Faser y_1 und z_1, so werden die Orte dieser Punkte während der Biegung angegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - 2\gamma x z_1 = (1 - 2\gamma z_1)\cdot x \\ y' &= y_1 + 2\mu\gamma y_1 z_1 = (1 + 2\mu\gamma z_1) y_1 \\ z' &= z_1 + \gamma x^2 - \mu\gamma\cdot(y_1^2 - z_1^2). \end{aligned}\right\} \quad (110)$$

Aus dem Umstande, dafs y' einen constanten, von x unabhängigen Werth besitzt, erkennt man, dafs die Curve, in welche die gerade Faser verbogen wird, jedenfalls in einer verticalen Längsebene, parallel der (x, z)-Ebene, verläuft, und zwar erscheint die Faser der letzteren Ebene nähergerückt, wenn $y' < y_1$, oder $(1 + 2\mu\gamma z_1) < 1$, oder $z_1 < 0$ ist, also in der oberen Hälfte des Stabes; in der unteren Hälfte wird $y' > y_1$, die Fasern werden dort von der (x, z)-Ebene weggedrängt. Um die Curve zu finden, mufs man aus den beiden Gleichungen für x' und z' die Variabel x eliminiren. Man erhält:

$$z' = z_1 + \frac{\gamma\cdot x'^2}{(1 - 2\gamma z_1)^2} - \mu\gamma\cdot(y_1^2 - z_1^2).$$

Da wir uns auf schwache Biegungen beschränken, ist γ sicher eine kleine Gröfse (γ ist der reciproke Werth einer im Vergleich zur Stablänge sehr grofsen Strecke). Deshalb dürfen wir γ^2 und höhere Potenzen vernachlässigen und finden:

$$z' = \left[z_1 - \mu\gamma\cdot(y_1^2 - z_1^2)\right] + \gamma\cdot x'^2. \quad (110\text{a})$$

Dies ist die Gleichung einer nach unten concaven, durch die Punkte x', z' gebildeten Parabel. Die eckige Klammer enthält für jede Faser einen constanten Werth, welcher die Höhenlage der Fasermitte ($x = 0$) während der Biegung anzeigt, diese wird der Scheitel der Parabel; sie erscheint gehoben gegen die Höhe z_1, wenn in der eckigen Klammer der Zusatz $-\mu\gamma\cdot(y_1^2 - z_1^2)$ wirklich negativ ist. Dies tritt ein, wenn der absolute Betrag von y_1 gröfser ist als der von z_1; im umgekehrten Falle erscheint die Fasermitte gesenkt. In dem Mittelquerschnitt erscheinen die Gebiete der Hebung und der Senkung abgegrenzt durch die beiden geraden Linien $z_1 = \pm y_1$, welche ein schräges Kreuz bilden, vergl. Fig. 9.

Die Krümmung der Parabeln ist wegen der Kleinheit von γ eine sehr geringe und für sämmtliche Längsfasern die gleiche. Ein

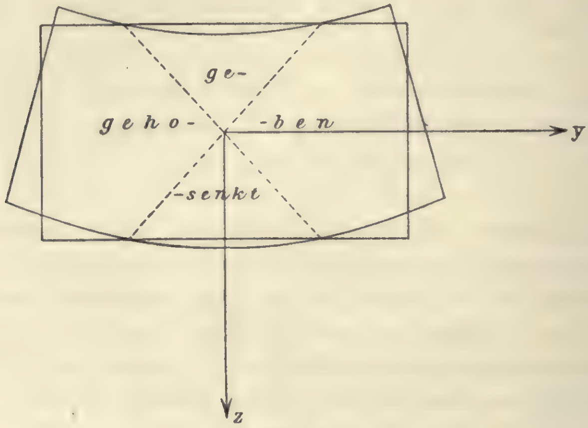

Fig. 9.

anschauliches Maſs für die Gröſse dieser Krümmung ist der Neigungswinkel der Faserenden. Durch Differentiation von (110a) folgt

$$\frac{dz'}{dx'} = 2\gamma \cdot x'.$$

Dieser Ausdruck giebt die trigonometrische Tangente der Neigung der Parabel an der Stelle x', oder so lange er hinreichend klein ist, den Neigungswinkel selbst. Hat die Endfläche des Stabes die Abscisse $x = p$, so ist bis auf unendlich kleine Gröſsen höherer Ordnung der Neigungswinkel φ des Stabendes:

$$\varphi = 2\gamma \cdot p.$$

Unser theoretisches Biegungsmaſs ist daher:

$$\gamma = \frac{\varphi}{2p} \tag{111}$$

und kann durch Messung bestimmt werden, indem man im Abstand p von der Stabmitte ein zur y-Axe paralleles Spiegelchen befestigt, dessen durch die Biegung verursachte Neigung mit Fernrohr und Scala genau bestimmt werden kann. Da man in der Praxis nicht recht weiſs, wo auf dem Stabe der Mittelquerschnitt anzunehmen ist, welcher seine Richtung im Raume genau beibehält, wird man zwei einander parallele quere Spiegelchen im Abstande $2p$ anbringen, und deren Neigung gegen einander 2φ bestimmen, indem man den Gang der Strahlen von der parallel der z-Axe angebrachten Scala zum Fernrohr an beiden Spiegeln reflectiren läſst.

Wir stellen nun eine zweite Frage: Was wird aus einer horizontalen Querfaser parallel der y-Axe? Die Lage der Faser im ungebogenen Stabe sei durch die Constanten x_1 und z_1 gekennzeichnet. Dann werden die Coordinaten eines beliebigen Punktes dieser Faser während der Biegung

$$\left.\begin{aligned} x' &= (1 - 2\gamma z_1) \cdot x_1 \\ y' &= (1 + 2\mu\gamma z_1) \cdot y \\ z' &= z_1 + \gamma(x_1^2 + \mu z_1^2) - \mu g y^2. \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

Diesmal besitzt x' einen constanten, von y unabhängigen Werth, ein Beweis, daſs die gekrümmten Querfasern in verticalen Ebenen parallel dem Mittelquerschnitt verlaufen. Sie erscheinen letzterem genähert, wo $x' < x_1$ ist, das ist in der unteren Stabhälfte der Fall, in der oberen Hälfte werden sie vom Mittelquerschnitt weggezogen. Die Gleichung der Curve erhält man durch Elimination von y aus den beiden Gleichungen für y' und z':

$$z' = [z_1 + \gamma \cdot (x_1^2 + \mu z_1^2)] - \frac{\mu\gamma y'^2}{(1 + 2\mu\gamma z_1)^2}$$

oder nach Vernachlässigung höherer Potenzen von γ:

$$z' = [z_1 + \gamma(x_1^2 + \mu z_1^2)] - \mu\gamma \cdot y'^2. \qquad (112\,\text{a})$$

Dies bezeichnet ebenfalls eine Parabel, aber concav nach oben. Ihr Scheitel liegt in der Mittelebene $y = 0$; die eckige Klammer giebt die Höhenlage des Scheitels, welcher bei allen Fasern (mit Ausnahme der y-Axe selbst) gesenkt erscheint, weil zu z_1 immer zwei positive Quadrate hinzutreten. Die Krümmung dieser Parabeln ist eine geringere als die der Längsfasern, weil hier zum Coefficienten γ des quadratischen Gliedes noch die Poisson'sche Zahl μ hinzutritt. Bei Glas- und Stahlstäben werden sie etwa viermal so schwach gekrümmt sein, bei Kautschukstäben, für welche man nahezu $\theta = \infty$, also $\mu = \frac{1}{2}$ setzen darf, wird die nach oben concave Querkrümmung bedeutender, etwa halb so stark wie die Längskrümmung.

Die dritte Schaar von Fasern, parallel der z-Axe, wecken weniger Interesse. Man könnte deren Krümmung in ähnlicher Weise berechnen und würde ebenfalls Parabelbögen finden, aber solche Stücke davon, welche sehr weit weg vom Scheitel liegen und deshalb völlig verschwindende Krümmungen besitzen.

Wir wollen jetzt eine letzte Frage stellen, deren Wichtigkeit bald hervortreten wird: Wie wird eine ursprünglich horizontale (auf z senkrechte) Ebene im Stabe verbogen? Die Ebene sei durch die Constante z_1 gekennzeichnet. Die Lage ihrer Massenpunkte während der Biegung ist dann:

$$\left.\begin{aligned} x' &= (1 - 2\gamma z_1)\cdot x \\ y' &= (1 + 2\mu\gamma z_1)\cdot y \\ z' &= z_1 + \mu\gamma z_1{}^2 + \gamma x^2 - \mu\gamma y^2. \end{aligned}\right\} \tag{113}$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen die Variabelen x und y, so erhält man eine Gleichung zwischen x', y', z', welche die verbogene Fläche analytisch darstellt. Man findet:

$$z' = [z_1 + \mu\gamma z_1{}^2] + \frac{\gamma x'^2}{(1 - 2\gamma z_1)^2} - \frac{\mu\gamma y'^2}{(1 + 2\mu\gamma z_1)^2}$$

oder nach Weglassung höherer Potenzen von γ:

$$z' = \left[z_1 + \mu\gamma z_1{}^2\right] + \gamma x'^2 - \mu\gamma y'^2. \tag{113a}$$

Die eckige Klammer giebt die stets gesenkte Lage des in der z-Axe gelegenen Punktes an. Diese Senkung ist nur für die horizontale Mittelebene des Stabes gleich Null und wächst nach oben und unten mit dem Quadrate des Abstandes z_1. Mit der Verbiegung der Flächen hat diese Senkung nichts zu thun. Man kann immer das Coordinatensystem so weit hinauf- oder hinunterrücken, daſs der Nullpunkt in der Fläche selbst liegt. Die auf das zurecht gerückte Coordinatensystem bezogenen z-Abmessungen der verbogenen Fläche nennen wir z''. Wir setzen also

$$z'' = z' - \left[z_1 + \mu\gamma z_1{}^2\right]$$

und erhalten:

$$z'' = \gamma x'^2 - \mu\gamma y'^2, \tag{113b}$$

die Gleichung eines hyperbolischen Paraboloids, dessen sattelförmig gekrümmter Scheitel in der horizontalen Ebene $z'' = 0$ liegt. Da in den Coefficienten der quadratischen Glieder rechts die Constante z_1, der einzelnen Schichten nicht vorkommt, so sind die verbogenen Flächen, so weit sie sich decken, einander alle congruent. „So weit sie sich decken" wird zugesetzt, weil ihre Ränder verschieden beschnitten sind: In der oberen Hälfte sind sie länglicher in der x-Richtung, schmaler in der y-Richtung, in der unteren Hälfte dagegen kürzer und breiter. Auch die obere und die untere freie Oberfläche des Stabes erfahren dieselbe Verbiegung.

Auf die Gestalt dieser Flächen hat Cornu[1] eine optische Methode zur Messung der Poisson'schen Zahl μ für Gläser gegründet. Er benützte dazu das unter dem Namen der Newton'schen Farbenringe bekannte Interferenzphänomen. Sehr dünne Luftschichten zwischen zwei Glasplatten, deren eine nicht vollkommen ebene Oberfläche besitzt, zeigen namentlich im reflectirten Lichte ein lebhaftes streifenartig angeordnetes Farbenspiel; bei einfarbigem Lichte erscheinen schärfere helle und dunkele Streifen. Diese Streifen laufen überall so, dafs sie Stellen gleicher Dicke der Luftschicht verfolgen und zwar unterscheiden sich für zwei Nachbarstreifen die Schichtdicken nur um eine halbe Wellenlänge des benützten Lichtes (z. B. bei gelbem Lichte nur um etwa 0,0003 mm). Man hat in dieser Erscheinung ein sehr empfindliches Erkennungsmittel für die örtliche Dickenänderung sehr dünner Schichten.

Die Cornu'sche Methode besteht nun im Wesentlichen darin, dafs man über die Mitte der sorgfältig eben geschliffenen oberen Seitenfläche eines rechteckigen Glasstabes eine planparallele leichte Glasplatte legt, oder sie auf einem fein verstellbaren Support so einstellt, dafs nur eine gleichmäfsige Luftschicht von minimaler Dicke zwischen den Glasflächen bleibt. Die Abwesenheit von Interferenzstreifen ist das Zeichen für die Planparalleleität der Luftschicht. Nun wird der Glasstab durch äufseren Zwang gebogen: Die Oberfläche krümmt sich und die Luftschicht nimmt dementsprechend an verschiedenen Stellen verschiedene Dicke an. Dies offenbart sich in einem System von Interferenzstreifen, welche enger zusammenrücken und zahlreicher werden, wenn die Krümmung des Stabes verstärkt wird.

Die Gestalt und Lage der Streifen erhält man, wenn man die durch Gleichung (113b) gegebene Sattelfläche durchschneidet durch eine Schaar von Ebenen parallel zu der aufgelegten ebenen Glasplatte. Der Abstand der Nachbarebenen mufs den Abstand einer halben

[1] Comptes rendus **69**, p. 333 (1869).

Wellenlänge haben. Diese Schnittcurven sind, wie die analytische Geometrie lehrt, coasymptotische Hyperbeln. Dem entspricht bei guten Gläsern der Anblick des Cornu'schen Versuches auch durchaus. Erscheint der Mittelpunkt des Hyperbelsystems in der Mitte des durch die beiden Glasflächen überdeckten Beobachtungsfeldes, so ist das ein Beweis, dafs die Glasplatte genau parallel der Ebene $z'' = 0$ liegt. Dies wollen wir annehmen; dann findet man die analytischen Gleichungen der einzelnen Streifen, wenn man in (113b) für z'' eine arithmetische Reihe von Werthen einsetzt, welche beginnen mit dem negativen Normalabstand zwischen dem Scheitel des Paraboloids und der Glasplatte, und zunehmen in positiven Schritten von je einer halben Welle über Null hinweg bis zu hinreichend vielen positiven Sonderwerthen. Die Asymptoten der Hyperbelschaar findet man, wenn man $z'' = 0$ einsetzt. Dann hebt sich auch γ: die Asymptoten sind von der Stärke der Biegung unabhängig; ihre Gleichung ist

$$x'^2 - \mu y'^2 = 0$$

oder

$$\frac{x'}{y'} = \pm \sqrt{\mu}$$

oder, da x' und y' nur unendlich wenig von x und y verschieden sind,

$$\frac{x}{y} = \pm \sqrt{\mu}. \tag{113c}$$

Nennen wir denjenigen Winkel zwischen den beiden Asymptoten, welcher durch die y-Axe halbirt wird, α, so ist $\frac{x}{y} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, mithin

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\mu}.$$

Der Winkel α ist nun eine an dem Streifenphänomen gut mefsbare Gröfse. Zwar halten die Streifen selten so lange vollkommen still, als zu einer sorgfältigen Messung erforderlich ist, doch gelang es, sie in sehr kurzen Expositionszeiten zu photographiren. Die Lichtbilder lassen sich dann in aller Ruhe ausmessen. Cornu gewann als Mittelwerth aus vielen Messungen einen solchen Werth für den Winkel α (nahe an 53^0), welcher sehr genau der Bedingung

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \tag{113d}$$

entsprach; das heifst, es ist für die von ihm untersuchten Gläser thatsächlich $\mu = \frac{1}{4}$.

Von der Isotropie seiner Glasstäbe konnte Cornu sich durch anderweitige empfindliche optische Prüfungen überzeugen. Indessen ist seine Vermuthung, die von Kirchhoff untersuchten Stahlstäbe (siehe hier § 46) müfsten anisotrop gewesen sein, eben weil sie für μ abweichende Werthe ergaben, dadurch nicht gerechtfertigt.

§ 45. Biegung horizontaler Stäbe durch Belastung der Enden.

Erzeugt man in einem Stabe Biegung dadurch, dafs man ihn an einem Ende in einem starren Halter horizontal festklemmt, während man das freie Ende durch ein angehängtes Gewicht belastet, so hat die Deformation nicht den einfachen Charakter, welcher in den beiden vorausgehenden Paragraphen vorausgesetzt wurde.

Wir haben zwar auch jetzt in jedem Querschnitte Gleichgewicht zwischen zwei entgegengesetzten Drehungsmomenten, hervorgebracht durch X_x-Kräfte; während aber bei der früheren Biegung diese Momente an allen Stellen des Stabes von gleicher Gröfse waren (da X_x nur proportional z, aber unabhängig von x gefunden wurde), haben wir hier Momente, welche am befestigten Ende ($x = 0$) am stärksten sind und bis Null abnehmen, wenn man gegen die Stelle des angehängten Gewichtes ($x = p$) vorrückt. Die Durchbiegung in Folge des Eigengewichtes des Stabes wollen wir bei dieser Betrachtung einfachheitshalber vernachlässigen, also annehmen, dafs der unbelastete Stab gerade und horizontal in die Luft ragt. Die angehängte Masse M mufs dann bedeutend gegenüber der Stabmasse angenommen werden, um deutliche, wenn auch kleine Biegung zu erzeugen.

Der Zustand an einem Querschnitte von bestimmtem x würde ungeändert bleiben, wenn das jenseits liegende Stück des Stabes ideal starr gemacht werden könnte. Dieses Stabende würde dann wirken wie ein Hebelarm von der Länge $p - x$, an dessen Ende eine Kraft Mg in Richtung der positiven z-Axe angreift. Da die Neigung klein bleiben soll, liefert dieser Hebel für den Querschnitt x ein Drehungsmoment

$$\mathfrak{N}_x = Mg \cdot (p - x). \tag{114}$$

Aus diesem mit wachsendem x abnehmenden Werthe kann man auch schliefsen, dafs die X_x gegen das belastete Ende hin gegen

Null streben, dafs also $\frac{dX_x}{dx}$ nicht gleich Null sein kann. Da nun nach der ersten der Gleichungen (40)

$$\frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz} = 0$$

sein mufs, können die beiden hinteren Glieder dieses Trinoms ebenfalls nicht Null sein. Wenn also beim Fehlen äufserer Flächenkräfte auf die Seiten des Stabes an der Oberfläche auch $X_y = X_z = 0$ sein mag, so werden die Schubkräfte doch im Inneren des Stabes wirksam sein müssen und Scheerungen parallel der x-Richtung erzeugen. Wir haben daher eine ziemlich verwickelte Anordnung der Verrückung zu erwarten. Die Betrachtung dieser soll hier nicht durchgeführt werden, wir wollen uns auf eine praktisch wichtige Frage beschränken, deren Antwort wir im nächsten Paragraphen brauchen werden:

Wie grofs ist der Neigungswinkel gegen die Horizontale an einer Stelle des Stabes, speciell an seinem Ende?

Ein sehr kurzer Ausschnitt aus dem Stabe, begrenzt durch zwei Querschnitte im Abstand dx, darf als gebogen gelten nach den einfachen Gesetzen der vorigen beiden Paragraphen, denn die Veränderung des Drehungsmomentes in der kurzen Strecke dx ist verschwindend gegen den ganzen Betrag. Zunächst müssen wir das dort benutzte Biegungsmafs γ aufsuchen. Dieses war in Gleichung (111) ausgedrückt durch einen Bruch, als dessen Zähler der Neigungswinkel zwischen Stabende und Stabmitte auftrat. Bezeichnen wir nun hier die Neigung der Stabcurve gegen die Horizontale an den Querschnittsstellen x und $x + dx$ mit φ und $\varphi + d\varphi$, so ist $d\varphi$ der ganze Richtungsunterschied zwischen den beiden Enden des Stabelementes, also das Doppelte des Winkels zwischen Ende und Mitte. Wir müssen also als Zähler von γ ansetzen $\frac{d\varphi}{2}$. Der Nenner von γ in Gleichung (111) bedeutet die ganze Stablänge, also in unserem Falle das ganze Längenelement dx. Wir finden also:

$$\gamma = \tfrac{1}{2} \frac{d\varphi}{dx}. \tag{115}$$

Nun wollen wir die weitere Betrachtung beschränken auf Stäbe mit rechteckigem Querschnitt $(2q \cdot 2r)$ und solche mit kreisförmigem Querschnitt $(\pi \cdot a^2)$, für welche wir in § 43 die fertigen Formeln für die zur Biegung γ gehörenden Drehungsmomente besitzen. Man erhält für den rechteckigen Querschnitt aus Gleichung (106) mit Benutzung von Gleichung (115) das an der Stelle x wirkende Moment:

$$\mathfrak{N}_x = \tfrac{4}{3}\, E\, q\, r^3 \cdot \frac{d\,\varphi}{d\,x} \tag{116 ▭}$$

für den kreisrunden Querschnitt aus Gleichung (107)

$$\mathfrak{N}_x = \frac{\pi}{4}\, E\, a^4 \cdot \frac{d\,\varphi}{d\,x}. \tag{116 ○}$$

Diese Ausdrücke müssen wir nun dem in Gleichung (114) geforderten Werthe des Drehungsmomentes gleichsetzen und werden dadurch für beide Stabformen auf die nämliche Differentialgleichung geführt:

$$\frac{d\,\varphi}{d\,x} = C \cdot (p - x). \tag{117}$$

Dabei ist für Rechtecke:

$$C = \frac{3\, M g}{4\, E\, q\, r^3} \tag{117 ▭}$$

und für Kreise:

$$C = \frac{4\, M g}{\pi\, E\, a^4}. \tag{117 ○}$$

Die höchst einfache Integration von (117) liefert φ als Function der Länge x:

$$\varphi = C \cdot \left(p\, x - \frac{x^2}{2}\right). \tag{118}$$

Eine Integrationsconstante tritt nicht hinzu, da für das eingeklemmte Stabende $\varphi = 0$ bleibt. Für das belastete Stabende folgt daraus $\varphi = \dfrac{C\, p^2}{2}$, also für den rechtwinkligen Stab:

$$\varphi = \frac{3\, M g \cdot p^2}{8\, E\, q\, r^3}, \tag{118 ▭}$$

für den kreisrunden Stab:

$$\varphi = \frac{2\, M g \cdot p^2}{\pi\, E\, a^4}. \tag{118 ○}$$

Letzteren Ausdruck werden wir im nächsten Paragraphen benützen.

Da wir gerade beim Integriren sind, wollen wir noch einen Schritt weiter gehen. So lange die Neigung klein ist, gilt für jede

Stelle des Stabes $\varphi = \frac{dz}{dx}$. Dies können wir in (118) links einsetzen. Eine nochmalige Integration liefert dann

$$z = C \cdot \left(\frac{p x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \tag{119}$$

Eine additive Constante ist auch hier unnöthig, da das feste Stabende seine Höhenlage nicht verändert. Die Stabcurve mufs also selbst bei kleiner Biegung als Curve dritten Grades, nicht aber als Parabel angesehen werden.

Die bei dieser Berechnung vorausgesetzte Grenzbedingung, dafs das Ende $x = 0$ horizontal festgeklemmt ist, kann man, wie leicht ersichtlich, auch durch eine andere Einrichtung ersetzen. Man braucht nur den Stab nach der Seite der negativen x fortzusetzen und dort ganz symmetrisch im Abstande $-p$ ein zweites Gewicht von derselben Masse M anzuhängen. Der Mittelquerschnitt $x = 0$ braucht dann nicht starr festgeklemmt, sondern nur unterstützt zu werden.

§ 46. Kirchhoff's Methode zur Bestimmung des Gröfsenverhältnisses zwischen den beiden elastischen Constanten isotroper Körper.

Die geschichtliche Entwickelung der Elasticitätstheorie hat es mit sich gebracht, dafs die Frage nach der Poisson'schen Zahl μ in den Vordergrund des Interesses gerückt wurde. So bezeichnet denn auch Kirchhoff im Titel der hier zu besprechenden Arbeit[1] als Ziel seiner Messungen „das Verhältnifs der Quercontraction zur Längendilatation“, indessen scheint die allgemeinere Bezeichnung, welche in der Ueberschrift dieses Paragraphen gewählt wurde, den ursprünglichen Sinn der Sache directer zu treffen. Es werden nämlich die durch eine geeignete Versuchsanordnung gleichzeitig erzeugte Biegung und Torsion cylindrischer Stäbe mit einander verglichen. Die vollkommene mathematische Analogie zwischen den Ausdrücken des Torsionsmomentes und des Biegungsmomentes, welche auch den Anstofs zur Erfindung dieser Mefsmethode gegeben hat, liefert dabei direct das Gröfsenverhältnifs zwischen den Moduln K und E. Ob man daraus nachher noch die Zahl μ oder die Zahl θ, oder endlich das Verhältnifs $H : K$ berechnet, ist unwesentlich.

[1] Pogg. Ann. 108, 1859. Ges. Abh. S. 316.

Die Methode wollen wir, ohne auf die verschiedenen Vorsichtsmafsregeln zum Schutz gegen Fehlerquellen einzugehen, nur in ihrem Princip charakterisiren. Ein Stab aus federhartem Stahl wird in seiner Mitte festgehalten (festgelöthet in einem passend durchlöcherten Stahlblech). Nahe seinen beiden Enden, symmetrisch zur Mitte und im gegenseitigen Abstand $2p$, sind an ihm zwei leichte Querarme senkrecht zum Stab und horizontal festgemacht, an deren diagonal gegenüberliegenden Enden im Querabstand l von der Stabaxe zwei gleiche Massen M angehängt werden können. Ohne diese Belastung sei der Stab gerade; die Durchbiegung durch das eigene Gewicht, durch die beiden Querarme und die nachher zu erwähnenden Spiegelchen an den Enden dürfen wir bei dieser Betrachtung vernachlässigen. Die beiden Kräfte Mg an den Armenden üben eine zweifache Wirkung. Um das klar zu machen, denken wir uns in den beiden Punkten, wo die Arme am Stab befestigt sind, noch je zwei einander entgegengesetzte Kräfte Mg, vertical abwärts und aufwärts. Diese vernichten sich in jedem der beiden gedachten Angriffspunkte, ihr Zusatz stört das eingetretene Gleichgewicht des belasteten Systems also nicht. Nun kann man aber auch zusammenfassen die abwärts gerichteten Schwerkräfte der angehängten Gewichte und die aufwärts gerichteten Zusatzkräfte. Diese bilden an beiden Enden je ein Kräftepaar, deren Moment den absoluten Betrag

$$\mathfrak{R}_\tau = Mg \cdot l \tag{120}$$

besitzt, das eine rechtsdrehend, das andere linksdrehend um die Stabaxe x. Diese Kräftepaare erzeugen eine Torsion in dem Cylinder, bei welcher die um die Axenlänge p von dem festgehaltenen Mittelquerschnitt abstehenden Teile um die Stabaxe gedreht sind durch den Winkel τ, dessen Betrag man direct aus Gleichung (97 a) auf S. 165 ablesen kann, wenn man für das Torsionsmoment den Werth (120) einsetzt. Es ergiebt sich also:

$$\tau = \frac{2Mg \cdot l \cdot p}{\pi K \cdot a^4}. \tag{120 a}$$

Nun bleiben noch die beiden in den Armkreuzungen nach unten ziehenden Kräfte Mg übrig, deren Resultante durch die Befestigung der Stabmitte aufgehoben wird. Diese beiden rufen diejenige Art von Biegung hervor, die wir im vorigen Paragraphen betrachteten, ganz ebenso, als wären die Massen nicht an den Querarmen, sondern am Stabe selbst in den Abständen $\pm p$ von der Mitte befestigt. Den

Neigungswinkel φ, welchen die Teile im Abstand p gegen die Horizontale dadurch annehmen, finden wir fertig berechnet in Gleichung ($118_{\bigcirc}$); er sei zum Vergleich hier wiederholt:

$$\varphi = \frac{2 Mg \cdot p^2}{\pi E \cdot a^4}. \tag{120 b}$$

Die beiden kleinen Deformationen Torsion und Biegung superponiren sich ungestört, die beiden kleinen Drehungen τ und φ, deren erstere um die horizontale x-Axe, letztere um die horizontale y-Axe stattfindet, addiren sich also geometrisch zu einer resultirenden Drehung um eine horizontale, schräg gegen den Stab gelegene Axe. Bei diesen Messungen kommt es nur auf deren Richtung an, man findet sie, wie bei allen Vectoradditionen, dadurch, dafs man auf der x-Axe einen Pfeil proportional τ, auf der y-Axe einen solchen proportional φ aufträgt; die Diagonale des Reckteckes aus τ und φ liefert die resultirende Axe. Der Winkel α, welchen sie mit der x-Axe bildet, ist gegeben durch:

$$\text{cotang}\ \alpha = \frac{\tau}{\varphi}.$$

Bildet man nach (120 a und b) die rechts stehende Verhältnifszahl, so heben sich dank der übereinstimmenden Bildung beider Ausdrücke die Factoren $\frac{2 Mg \cdot p}{\pi a^4}$. Man hat also nicht nöthig die absolute Gröfse der Belastung M und namentlich nicht den Radius a der Cylinder zu bestimmen. Man erhält

$$\frac{\tau}{\varphi} = \frac{l}{p} \cdot \frac{E}{K}. \tag{121}$$

Die Strecken l und p müssen also genau ausgemessen werden; der KIRCHHOFF'sche Apparat besitzt technische Einrichtungen, welche dies durch Einstellen der Mikroskope eines Comparators auf gewisse scharfe Marken ermöglicht; die einen bestimmen exact die doppelten Längen $2l$ auf den Querarmen, die anderen den Abstand $2p$ der beiden Arme auf dem Stabe. Die hauptsächliche während des Versuches durch Beobachtung festzustellende Gröfse ist der Winkel α oder das Verhältnifs zwischen τ und φ. Zu dem Zwecke sind an den Stabenden nahe aufserhalb der Querstäbe zwei nach oben gekehrte Silberspiegelchen horizontal angebracht; da die Stabenden jenseits der Querarme von keinen Kräften angegriffen werden, so findet in ihnen auch keine Deformation weiter statt, sie machen vielmehr die Drehungen mit, welche die Kreuzungspunkte von Stab und Querarmen ausführen. In diesen Spiegeln wird durch zwei vertical nach unten gerichtete Fernrohre mit Fadenkreuzen ein enges Netz von senkrecht sich durchsetzenden äquidistanten Linien parallel den Richtungen x und y betrachtet. Dieses fein geteilte Coordinatenpapier, dessen Theilstriche ablesbar numerirt sind, ist zu Häupten des ganzen Apparates horizontal befestigt, und ersetzt gewissermaſsen zwei auf einander senkrechte Scalen, deren eine, parallel x, den Winkel φ allein, deren andere, parallel y, den Winkel τ allein abzulesen erlaubt. Die Ablesungen beider Scalenabmessungen, welche das Fadenkreuz vor der Belastung und nach der Belastung auf dem Coordinatenpapier markirt, geben dann das vollständige Material zur Bestimmung von $\frac{\tau}{\varphi}$.

Damit ist diese Methode in ihrem Princip beschrieben. Das directe Ergebniſs ist die genaue Kenntniſs des Verhältnisses:

$$\frac{E}{K} = \frac{\tau}{\varphi} \cdot \frac{p}{l}. \tag{121 a}$$

Unsere Tabelle (87) auf S. 153 zeigt nun, daſs $\frac{E}{K} = 2(1 + \mu)$ ist. Setzt man dies in die darüberstehende Gleichung ein, so kann man berechnen

$$\mu = \frac{\tau}{\varphi} \cdot \frac{p}{2l} - 1. \tag{121 b}$$

Als Mittel aus vielen Beobachtungen an drei federharten Stahlstäben fand Kirchhoff den Werth

$$\mu = 0{,}294,$$

also erheblich mehr als $^1/_4$. Für einen gezogenen Messingstab fand er gar $\mu = 0{,}387$; dieser war sicherlich nicht isotrop, doch ist es unmöglich anzunehmen, daſs dadurch allein eine so grobe Abweichung gegen den von Poisson und Cornu geforderten Werth erklärt werden kann.

Vierter Theil.

Gleichgewicht und Bewegungen in continuirlich verbreiteten Massen. Die Kräfte sind vorgeschrieben, die Verrückungen werden gesucht.

§ 47. Einleitung.

Es wurde bereits am Anfang des vorigen Theiles erwähnt, dafs die zweite Klasse von Aufgaben, bei denen die wirkenden Kräfte als bekannt angesehen werden und die Verrückungen oder Deformationen, welche dadurch in bestimmten Körpern erzeugt werden, zu suchen sind, dafs diese Aufgaben schwierig zu behandeln sind und sich nicht in allen Fällen analytisch lösen lassen. Die Schwierigkeit liegt immer in der Erfüllung der richtigen Grenzbedingungen. Man hat da keine allgemein anwendbare Methode, sondern ist meist angewiesen auf empirisches Errathen der richtigen Lösung oder auf nur angenäherte Darstellungen. Für unbegrenzte Substanzen indessen, bei denen keine Bedingungen für die Oberfläche zu berücksichtigen sind, giebt es eine allgemeine Methode der Lösung. Die Kräfte, welche das Innere der unbegrenzt gedachten Substanz angreifen, sind die schon früher von uns eingeführten Massenkräfte oder Fernkräfte, also gerade diejenigen, welche wir in allen Beispielen des vorigen Theiles unberücksichtigt lassen durften. Diesen wird das Gleichgewicht gehalten von den aus der Verzerrung der Substanz entspringenden Antrieben auf die Masse.

§ 48. Die Differentialgleichungen für die Volumdilatation und die drei Drehungscomponenten.

Wir haben die Massenkräfte, deren Beschleunigungscomponenten durch X, Y, Z bezeichnet wurden, ursprünglich gewonnen in den Formen Gleichungen (40) Seite 77. Die sechs Stressgröfsen, deren

Differentialquotienten hineinkommen, hatten wir aber für isotrope Medien in den Gleichungen (65 und a) auf die Differentialquotienten der Verrückungscomponenten zurückgeführt, und so die fertigen Differentialgleichungen (67) enthalten, die wir hier gebrauchen wollen. Sie lauteten:

$$\left.\begin{aligned}
\mu' X &= - K\cdot\varDelta\xi - K(1+2\theta)\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}\\
\mu' Y &= - K\cdot\varDelta\eta - K(1+2\theta)\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}\\
\mu' Z &= - K\cdot\varDelta\zeta - K(1+2\theta)\cdot\frac{\partial\omega}{\partial z}\cdot
\end{aligned}\right\} \tag{122}$$

Die Massendichtigkeit bezeichnen wir zum Unterschied von der einen Drehungscomponente μ hier und im Folgenden immer durch μ'. In diesen Gleichungen sind die linken Seiten jetzt als bekannte Functionen der Coordinaten anzusehen. Die Elasticitätscoefficienten K und θ (statt welcher man auch H und K benutzen könnte) sollen, ebenso wie μ', im ganzen Raume constant sein. An unbekannten Variabeln haben wir ξ, η, ζ und die Bildung:

$$\omega = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\cdot \tag{123}$$

Wegen des Vorkommens dieses ω sind die Variabelen in den drei Gleichungen nicht getrennt. Man kann aber durch zwei ganz typische Operationen aus ihnen neue Differentialgleichungen ableiten, deren jede nur eine einzelne unbekannte Function enthält. Erstens differenziren wir die erste nach x, die zweite nach y, die dritte nach z, und addiren alle drei. Dann darf man $\frac{\partial}{\partial x}\varDelta\xi = \varDelta\frac{\partial\xi}{\partial x}$ setzen und findet:

$$\left.\begin{aligned}
&\mu'\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\\
&\quad = -K\cdot\varDelta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) - K(1+2\theta)\cdot\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\right)\\
&\quad = -2K(1+\theta)\cdot\varDelta\omega.
\end{aligned}\right\} \tag{124}$$

Zweitens aber differenzirt man die dritte Gleichung nach y und zieht davon ab die nach z differenzirte zweite Gleichung; dadurch eliminirt man ω und es bleibt:

$$\mu'\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) = -K\cdot\Delta\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right). \tag{124a}$$

Durch analoge Verbindung der anderen möglichen Paare kommt noch:

$$\mu'\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) = -K\cdot\Delta\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right). \tag{124b}$$

$$\mu'\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = -K\cdot\Delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right). \tag{124c}$$

In diesen letzten drei Gleichungen kommen rechts als gesuchte Functionen die doppelten Componenten der Drehung 2λ, 2μ, 2ν vor, welche mit den Verrückungen verbunden ist. Etwas anders geordnet kann man also diese vier Differentialgleichungen schreiben:

$$\Delta\omega = -\frac{\mu'}{2K(1+\theta)}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right). \tag{125}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\lambda &= -\frac{\mu'}{2K}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\\
\Delta\mu &= -\frac{\mu'}{2K}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\\
\Delta\nu &= -\frac{\mu'}{2K}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{125a}$$

Die rechten Seiten sind vorgeschriebene Functionen der Coordinaten. Die Gleichungen sind alle nach dem gleichen Schema gebaut, welches wir schreiben können:

$$\Delta\varphi = -4\pi\cdot f(x, y, z). \tag{126}$$

Dabei ist φ die gesuchte Function, während $f(x, y, z)$ eine vorgeschriebene Function ist. Differentialgleichungen dieser Art treten in verschiedenen Kapiteln der theoretischen Physik auf. Zuerst begegnete man ihnen wohl bei der Theorie der Anziehung beziehungsweise Abstofsung zwischen trägen Massen (Gravitation) und zwischen elektrischen oder magnetischen Ladungen. Die gegebene Function f bedeutet dann die räumliche Dichtigkeit des Agens, von welchem die wirkenden Kräfte ausgehen, während φ als das Potential dieser Kräfte bezeichnet wird. Als Werth des Potentials an einer Stelle des Raumes definirt man die Arbeit, welche nöthig ist, um ein mit der positiven Einheit des Agens beladenes Theilchen aus unendlicher Entfernung, wo die Kräfte verschwinden müssen, heranzuführen an den betreffenden Ort gegen die Abstofsung der gleichnamigen durch die Verteilung von f angegebenen Agentien. Bei der Gravitation tritt freilich der merkwürdige Umstand ein, dafs wir nur absolute Werthe des Agens, nämlich nur positive Massen kennen, zwischen denen immer Anziehung besteht. Das nach vorstehender Definition berechnete Potential einer im Endlichen liegenden Massenvertheilung hat dann stets negativen Werth und nähert sich in grofsen Entfernungen dem Werthe Null. Bei elektrischen oder magnetischen Dichtigkeiten aber werden wir in der Nähe positiver Ladungen auch positive Werthe von φ zu erwarten haben. Diese Verhältnisse entsprechen mehr denen, die wir hier zu betrachten haben, denn die hier auftretenden vorgeschriebenen Functionen f, Complexe von Differentialquotienten der Massenkräfte, sind ebenfalls algebraische Gröfsen, welche sowohl positive wie negative Localwerthe besitzen können. Da nun die Theorie dieser zuerst von Poisson aufgestellten und gewöhnlich nach ihm benannten Poisson'schen Differentialgleichung zumeist bei Gelegenheit der elektrostatischen und magnetischen Erscheinungen eingehend studirt wurde, so haben sich die Bezeichnungen Potential und Dichtigkeit für φ und f eingebürgert und werden, da diese Namengebung kurz und vollkommen bezeichnend für das Verhalten der beiden Functionsformen ist, auch übertragen auf Gebiete, wo es sich der Sache nach um Begriffe anderer Art handelt, wie z. B. hier. Wo die Bezeichnung „Dichtigkeit“ zu Irrthümern führen könnte, weil noch wahre Dichtigkeiten daneben in der Rechnung vorkommen, wie z. B. hier unser μ', spricht man auch wohl allgemeiner von Intensitäten, welche der Potentialfunction zu Grunde liegen. Durch die vier Gleichungen (125 und a) sind also ω, λ, μ, ν als vier Potentialfunctionen charakterisirt, deren zugehörige Dichtigkeiten oder Intensitäten bekannt sind durch die Kraftausdrücke rechts (Divergenz und Curl der Kraft). Den Factor 4π, welcher in Gleichung (126) wegen der elektrischen Bedeutung von f als Dichtigkeit der Ladung zugesetzt werden mufste, kann man leicht in die Gleichungen (125) hineinschaffen, indem man ihn im Zähler und Nenner zusetzt. Ein begrifflicher Unterschied ist noch zu erwähnen. Die Potentiale der Elektrostatik, auch der Gravitation, auch die Geschwindigkeitspotentiale der Hydrodynamik sind ungerichtete Gröfsen; von unseren Unbekannten ist nur ω ungerichtet, dagegen sind λ, μ, ν Componenten des Vectors Drehung.

Vorausgesetzt nun, die Manier der Integration solcher Differentialgleichungen wäre uns schon bekannt, so würden wir vier von einander unabhängige Lösungen ω, λ, μ, ν finden. Die Functionen

λ, μ, ν sind aber nicht unabhängig von einander, sondern es besteht zwischen ihnen nothwendig die Beziehung:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0, \tag{127}$$

was man sofort aus den Definitionsausdrücken der λ, μ, ν in Gleichungen (10 a') sieht. Bildet man den vorstehenden Ausdruck, so heben sich die 6 zweiten Differentialquotienten der Verrückungscomponenten paarweise auf. Die Resultante von ξ, η, ζ ist ein im Raume stetig angeordneter Vector ϱ, für einen solchen gilt also in der Ausdrucksweise der Vectoranalysis: $\mathrm{Div}\,\mathrm{Curl}\,\varrho = 0$. Die Divergenz des Curls eines stetig verbreiteten Vectors ist immer Null. Wir werden daher für die drei Differentialgleichungen (125 a) nur solche Integrale brauchen können, welche zugleich auch dieser letzten Beziehung (127) gehorchen. Nun ist zu bemerken, dafs die rechten Seiten, wo die bekannten Kräfte stehen, analog zusammengesetzt sind, wie die Drehungscomponenten. Wenn wir also die erste der Gleichungen (125 a) nach x, die zweite nach y, die dritte nach z differenziren und alle drei addiren, so finden wir auch für solche Lösungen, welche der Beziehung (127) nicht entsprechen sollten, doch immer:

$$\Delta\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) = 0. \tag{128}$$

Wir wollen nun zeigen, wie man ein Lösungssystem λ, μ, ν, welches der geforderten Beziehung nicht entspricht, corrigiren kann. Die in Gleichung (127) gleich Null geforderte Summe wird dann irgend einen Ausdruck haben, welcher als Function der Coordinaten erscheint. Wir wollen diesen Ausdruck sogleich als das Δ einer neuen Potentialfunction χ bezeichnen:

$$\Delta \chi = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}. \tag{128 a}$$

Die corrigirten Lösungen λ, μ, ν haben dann die Form

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda - \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ \mu_1 &= \mu - \frac{\partial \chi}{\partial y} \\ \nu_1 &= \nu - \frac{\partial \chi}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{128 b}$$

Bildet man nämlich jetzt die Divergenz der corrigirten Lösungen, so ergiebt sich

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \frac{\partial \mu_1}{\partial y} + \frac{\partial \nu_1}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} - \Delta \chi \equiv 0. \qquad (128\,\mathrm{c})$$

Wenn es also nicht gelingt auf den ersten Wurf die passenden Functionen für λ, μ, ν zu finden, so haben wir hier ein Mittel geeignete Ergänzungsglieder hinzuzufügen, welche diesen Mifsstand beseitigen; freilich erfordert dieser Vorgang wieder die Integration einer ebensolchen Differentialgleichung, durch welche das Δ der gesuchten Function χ einer bekannten Function gleichgesetzt wird.

§ 49. Ueber mancherlei Lösungen der Gleichung $\Delta\varphi = 0$.

Wir haben uns zunächst um die Eigenschaften der Functionen zu kümmern, welche die Poisson'sche Differentialgleichung befriedigen. Haben wir zwei verschiedene Functionen φ_1 und φ_2 gefunden, welche beide dies leisten, dafs

$$\Delta \varphi_1 = -4\pi f \text{ und auch } \Delta \varphi_2 = -4\pi f \text{ ist,}$$

so kann man von beiden Seiten der Gleichungen die Differenzen bilden und erhält

$$\Delta (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 .$$

Zwei verschiedene Lösungen können also sich nur unterscheiden um eine additiv hinzutretende Function, deren Δ gleich Null ist, also mit der besonderen Gestalt der vorgeschriebenen Dichtigkeit f nichts zu thun hat. Haben wir nur ein einziges particuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung (126) gefunden, so können wir alle möglichen Lösungen daraus bilden durch Hinzufügung von Summanden, welche die Gleichung

$$\Delta \varphi = 0 \qquad (129)$$

befriedigen. Diese zuerst von Laplace aufgestellte und nach ihm benannte homogene lineare partielle Differentialgleichung ist eine specielle Form der allgemeineren Poisson'schen. Sie gilt für das Potential an solchen Stellen des Raumes, in denen die Dichtigkeit f verschwindet, in unseren elastischen Gleichungen also da, wo entweder keine Massenkräfte angreifen, oder nur in solcher Vertheilung angebracht sind, dafs ihre Divergenz und ihr Curl beide verschwinden.

Wegen der wichtigen Rolle, welche die Integrale der LAPLACE'schen Differentialgleichung auch als Zusatzglieder zu einzelnen Lösungen der allgemeineren POISSON'schen Differentialgleichung spielen, ist es rathsam zunächst die sehr eingehend studirten Functionsformen, welche der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügen, anzuführen.

Eine erste Klasse von Lösungen sind ganze homogene algebraische Functionen der Coordinaten. Jede im Raum constante Gröfse und auch jede homogene lineare Function $\varphi = Ax + By + Cz$ ist eine Lösung, denn alle zweiten Differentialquotienten dieser sind einzeln gleich Null.

Bei einer homogenen Function zweiten Grades

$$\varphi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy$$

erhält man

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 2(A + B + C).$$

Eine solche ist also nur dann Integral der LAPLACE'schen Gleichung, wenn $A + B + C = 0$ ist; von den sechs Coefficienten bleiben also D, E, F willkürlich, von den drei ersten ist aber einer durch die beiden anderen bereits mit bestimmt. Immerhin bleiben fünf Coefficienten frei. So kann man weiter zu höheren Graden aufsteigen. Eine homogene Function der Variabelen x, y, z vom Grade n besitzt, wie man sich leicht klar machen kann, $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Glieder, also ebenso viele feste Coefficienten; durch die zweimaligen Differentiationen, welche zur Bildung von $\Delta\varphi$ nöthig sind, erniedrigt sich der Grad um zwei Factoren in jedem Gliede. Das $\Delta\varphi$ wird dann eine homogene Function vom Grade $n - 2$, besitzt also nur $\frac{(n-1)n}{2}$ Glieder. Deren Coefficienten sind unter Mitwirkung ganzer Zahlen gebildete homogene lineare Ausdrücke der ursprünglichen Coefficienten von φ. Soll nun $\Delta\varphi$ an allen Stellen gleich Null sein, so mufs jeder der zusammengesetzten Coefficienten einzeln gleich Null gefordert werden; so viele lineare Gleichungen müssen also zwischen den Coefficienten von φ erfüllt sein, als $\Delta\varphi$ Glieder zählt. Die übrigen bleiben frei; ihre Anzahl beträgt

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = 2n + 1,$$

so dafs man immerhin einen weiten Spielraum in der Auswahl passender Functionen behält.

Auch Summen von homogenen ganzen Functionen verschiedener Grade, welche einzeln gültig sind, liefern Lösungen. Es ist in allen diesen Fällen immer leicht die nothwendigen Bedingungen zwischen den Coefficienten aufzufinden und eventuell mit Hülfe der Methode der unbestimmten Multiplicatoren an den Ausdrücken anzubringen. Diese Klasse von Lösungen besitzt im ganzen Raum ohne Ausnahmestellen endliche Werthe, und überall einen stetigen Verlauf, auch alle Differentialquotienten bleiben allerorten stetig. Nur in unendlichen Entfernungen werden sie über alle Grenzen wachsen.

Wichtiger ist eine andere Klasse von Lösungen, Functionen welche an gewissen Stellen im Inneren des Raumes, an Punkten, Linien oder Flächen unstetig oder unendlich werden. Gerade bei den vorliegenden Differentialgleichungen spielen die Discontinuitäten im Inneren des Raumes, für welchen sie integrirt werden sollen, eine besonders wichtige Rolle; von ihrer Art und Vertheilung hängt fast ausschliefslich die Bestimmung der Functionen ab. Wählen wir einen festen Punkt im Raume mit den Coordinaten a, b, c; dann ist der Abstand r eines beliebigen Punktes x, y, z vom diesem gegeben durch den Ausdruck

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2. \tag{130}$$

Daraus folgt durch Differentiation nach x

$$2r \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = 2\,(x-a)$$

und zwei analoge Ausdrücke kann man für y und z finden. Es ist also

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-c}{r}. \tag{130a}$$

Wir können nun nachweisen, dafs die Function

$$\varphi = \frac{m}{r}, \tag{131}$$

in welcher m eine Constante bedeutet, ein particuläres Integral der LAPLACE'schen Gleichung ist. Die Variabelen x, y, z stecken in φ implicit darin, es ist also nach den Regeln der Differentialrechnung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d \varphi}{d r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{m}{r^2} \cdot \frac{x-a}{r} = -\frac{x-a}{r^3} m$$

und der zweite Differentialquotient wird:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{m}{r^3} + 3\frac{x-a}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot m = -\frac{m}{r^3} + 3\frac{(x-a)^2}{r^5} m.$$

Analog findet man

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{m}{r^3} + 3\frac{(y-b)^2}{r^5} m$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{m}{r^3} + 3\frac{(z-c)^2}{r^5} m.$$

Bildet man durch Addition dieser drei Ausdrücke $\Delta \varphi$, so vereinigen sich die ersten Terme zu $-\frac{3m}{r^3}$, die zweiten geben im Zähler nach Gleichung (130) den Ausdruck für r^2, welcher mit der fünften Potenz von r im Nenner und mit dem gemeinsamen Factor 3 zu dem Werthe $+\frac{3m}{r^3}$ zusammentritt. Es ist also

$$\Delta \frac{m}{r} = -\frac{3m}{r^3} + \frac{3m}{r^3}$$

ein Ausdruck, der in der That im Allgemeinen gleich Null ist. Nur in dem Centrum selbst, wo $r = 0$ ist, erhalten wir $-\infty + \infty$, ein Zeichen ohne bestimmten Sinn. Der Punkt a, b, c bildet also eine Ausnahmestelle, im ganzen übrigen Raume aber genügt die Function $\varphi = \frac{m}{r}$ der LAPLACE'schen Gleichung.

Nun können wir eine beliebige Menge solcher Centra in den Raum einstellen und für jedes eine Potentialfunction

$$\varphi_a = \frac{m_a}{r_a}$$

bilden. Wegen der Homogeneität der Differentialgleichung ist dann deren Summe

$$\varphi = \sum_a \frac{m_a}{r_a} \tag{131 a}$$

auch ein Integral, welches überall im Raume gilt, mit Ausnahme der Centralpunkte, in denen ein einzelnes r_a verschwindet, also ein Glied der Summe unendlich wird. Hat man in einem abgeschlossenen Raumgebiet eine Lösung der Differentialgleichung herzustellen, welche an allen Punkten gültig bleibt, so kann man immer noch aufserhalb oder sogar in der Begrenzungsfläche dieses Gebietes solche Centra annehmen mit bestimmten Intensitäten m_a. Das Integral (131a) könnte dann nur dadurch unendlich grofs werden, dafs man die Zahl a der endlichen Summanden über alle Grenzen grofs nimmt. Ist man dazu gezwungen, so mufs man die zugehörigen Intensitäten m_a in entsprechendem Mafse verschwindend klein wählen, denn das Unendlichwerden der Lösung mufs man vermeiden.

Schliefslich sei noch bemerkt, dafs auch alle nach den Coordinaten genommenen Differentialquotienten gefundener Lösungen wieder Lösungen ergeben, denn wenn $\Delta\varphi = 0$ ist, so ist auch $\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$ etc. Nur hat man dabei zu beachten, welche neue Unstetigkeiten durch die Differentiation eventuell eingeführt werden. Die durch diesen letzten Schritt gewonnenen Lösungen entsprechen immer dicht nebeneinander liegenden Centren von entgegengesetzt gleicher Intensität, welche dann im Vergleich zu den einfachen Intensitäten sehr grofse Werthe haben müssen, um in entfernteren Stellen noch bemerkbare Beiträge zum Integral φ zu liefern.

§ 50. Der Green'sche Satz.

Die Lehre von den Eigenschaften der Integrale der Differentialgleichungen von Laplace und Poisson wird wesentlich gefördert durch einen analytischen Satz, den wir Green verdanken. Dieser Satz ist im Wesentlichen eine Methode der partiellen Integration, durch welche ein über bestimmte Raumgrenzen erstrecktes dreifaches Integral dargestellt werden kann durch ein Oberflächenintegral über die Begrenzung dieses Raumes, zu welchem freilich, wie bei jeder nur partiellen Integration, noch ein Restglied hinzutritt, welches Raumintegral geblieben ist. Die Ableitung dieses Satzes geht aus von der nämlichen Formel der Differentialrechnung, aus welcher auch die gewöhnliche partielle Integration sich herleitet:

$$u \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot \psi) - \psi \cdot \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{132}$$

Multipliciren wir mit $dx\,dy\,dz$ und integriren über einen beliebig umgrenzten Raum, in dessen Innerem die beiden Functionen u und ψ

definirt sind, so kann man im ersten Gliede rechts die Integration nach x ausführen

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot \psi) \cdot dx = \overline{\underline{u \cdot \psi}}_{x_0}^{x_1} \tag{132a}$$

und es bleibt nur ein Doppelintegral übrig. Dieses ist aber umzuwandeln in ein Oberflächenintegral. Errichtet man nämlich normal auf der kleinen Basisfläche $dy \cdot dz$ eine Säule, so tritt diese, in der positiven x-Richtung wachsend, an einer Stelle in das Innere des Integrationsgebietes ein, und an einer gegenüberliegenden Stelle wieder hinaus. Der mögliche Umstand, dafs diese Säule mehrmals ein- und austritt, ist für die weitere Betrachtung kein Hindernifs. In solchen Fällen ist auch in (132a) für $\overline{\underline{u \cdot \psi}}$ nicht einfach die Differenz der Oberflächenwerthe zwischen dem letzten Austritt und dem ersten Eintritt zu setzen, sondern es sind die Differenzen der Werthe zwischen je zwei auf einander folgenden Eintritts- und Austrittsstellen zu bilden und deren Summe zu nehmen. Wir wollen hier auf diese Complication nicht weiter eingehen. Die Säule schneidet aus der Oberfläche zwei Flächenelemente heraus, an der Eintrittsstelle ds_0, an der Austrittsstelle ds_1. Die ins Innere gerichtete Normale bildet an der Eintrittsstelle mit der positiven x-Richtung einen spitzen Winkel. Es ist daher, wenn alle Flächenwerthe absolut genommen werden,

$$dy \cdot dz = ds_0 \cdot \cos n_0 x.$$

An der Austrittsstelle aber ist $n_1 x$ nothwendig stumpf, man mufs daher setzen

$$dy \cdot dz = -ds_1 \cos n_1 x.$$

Man kann also folgende Umformung machen

$$\begin{aligned}\iint dy\, dz\, \overline{\underline{u \cdot \psi}}_{x_0}^{x_1} &= \iint dy\, dz\, (u \cdot \psi)_{x_1} - \iint dy\, dz\, (u \cdot \psi)_{x_0} \\ &= -\iint ds_1 \cos n_1 x \cdot (u \cdot \psi)_{x_1} - \iint ds_0 \cos n_0 x \cdot (u \cdot \psi)_{x_0} \\ &= -\iint ds \cos n x \cdot (u \cdot \psi).\end{aligned}$$

Dieses letzte Integral ist über die gesammte Oberfläche des Integrationsgebietes zu erstrecken. (Vergl. die ganz ähnliche Umformung auf S. 69.) Wir gewinnen also aus Gleichung (132)

$$\iiint dx\,dy\,dz \cdot \left(u \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$
$$= - \iint ds \cos nx \cdot (u \cdot \psi) - \iiint dx\,dy\,dz \cdot \left(\psi \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right). \quad (132\text{b})$$

Damit der eben ausgeführte Schritt möglich sei, müssen erstens u und ψ, sowie deren erste Differentialquotienten eindeutig sein und so verlaufen, dafs die beiden Raumintegrale endliche Werthe erhalten. Sie dürfen also höchstens an einzelnen Stellen in solcher Weise unendlich werden, dafs trotzdem die Integrale endlich bleiben. Zweitens aber setzt die partielle Integration, welche in Gleichung (132a) ausgeführt ist, voraus, dafs $u \cdot \psi$ im ganzen inneren Raume stetig verläuft. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, wird die Gleichung (132a) ungültig, weil die linke Seite von einem Sprunge des $(u \cdot \psi)$ nicht betroffen wird, während er rechts in der Differenz der Grenzwerthe mit aufgenommen ist. Will man die Gleichung für einen solchen Fall corrigiren, so mufs man rechts die Gröfse dieses Sprunges abziehen, oder man mufs die Discontinuität auffassen als eine stetige aber sehr steile Aenderung des $u \cdot \psi$. Der Differentialquotient $\frac{\partial}{\partial x}(u \cdot \psi)$ bekommt dann an jener Stelle einen sehr grofsen Werth, so dafs ein einzelnes Element des links stehenden Integrals, bei welchem der Schritt dx über dies Gebiet wegsetzt, einen endlichen Betrag erhält. Bei beiden Auffassungen kommt es darauf hinaus, dafs man die Unstetigkeitsstelle durch eine ihrer Gestalt angepafste Oberfläche umhüllen mufs, sie gewissermafsen aus dem Integrationsraume herausschneiden mufs und diese Oberfläche mit unter die Begrenzungen des Raumes aufnehmen mufs. In dem Flächenintegral der Gleichung (132b) sind dann auch die über diese innere Grenzfläche genommenen Antheile zu berücksichtigen.

Nun wollen wir die Function u auffassen als die nach x gebildete Ableitung einer anderen Function φ

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Die Bedingungen für φ bestehen dann darin, dafs auch dessen zweiter Differentialquotient $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, welcher im Raumintegral rechts auftritt, integrabel bleibe, und dafs der erste Differentialquotient $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ stetig verlaufen mufs. Aus der Gleichung (132b) wird bei dieser Annahme:

$$\left.\begin{aligned}&\iiint dx\,dy\,dz \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}\\&\quad = -\iint ds \cdot \cos nx \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}\psi - \iiint dx\,dy\,dz \cdot \psi \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.\end{aligned}\right\} \quad (132\text{c})$$

Was wir nun eben unter besonderer Behandlung der x-Coordinate abgeleitet haben, können wir an denselben beiden Functionen φ und ψ auch in Bezug auf die y- und z-Coordinate ausführen. Es treten dann natürlich die ganz analogen Bedingungen der Integrabilität und Stetigkeit auch für die nach y und z gebildeten Differentialquotienten hinzu, und man gewinnt noch zwei solche Gleichungen, welche aus (132c) durch Ersetzung des Zeichens x durch y resp. durch z hervorgehen. Diese drei Gleichungen wollen wir nun addiren. Da die Integrationsgrenzen sich in allem auf denselben Raum und dessen Oberfläche beziehen, kann man die drei Raumintegrale links und rechts und auch die drei Oberflächenintegrale in je eines zusammenfassen. Dabei tritt in letzterem als Integrandus auf:

$$\cos nx \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \psi + \cos ny \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}\psi + \cos nz \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \psi.$$

Macht man nun an irgend einer Stelle der Oberfläche einen Schritt dn in Richtung der inneren Normale, dessen Componenten durch dx, dy, dz gegeben sind, so ist

$$\cos nx = \frac{dx}{dn}, \ \cos ny = \frac{dy}{dn}, \ \cos nz = \frac{dz}{dn}.$$

Der Integrand des Oberflächenintegrales wird

$$\psi \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dn}\right) = \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Im Raumintegral bildet sich die Summe der zweiten Differentialquotienten, welche wir durch $\Delta\varphi$ bezeichnet haben. Nun können wir das Resultat der Addition der drei analog (132c) gebildeten Gleichungen fertig hinstellen in der Gleichung

$$\left.\begin{aligned}&\iiint dx\,dy\,dz \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\\&\qquad = -\iint ds \cdot \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \iiint dx\,dy\,dz \cdot \psi \cdot \Delta\varphi\end{aligned}\right\} \quad (133)$$

Dies ist die Grundform des Green'schen Satzes.

Die linke Seite ist nach beiden Functionen φ und ψ symmetrisch gebildet. Die rechte Seite aber ist unsymmetrisch: Die Function ψ ist nicht differenzirt, dementsprechend sind auch die zur Gültigkeit des Satzes nöthigen Bedingungen für beide Functionen ungleich. Ueber die Stetigkeit der ersten und die Integrabilität der zweiten Differentialquotienten von ψ brauchen keine bestimmten Annahmen gemacht zu werden. Wenn aber ψ derartig ist, daſs es alle die für φ nöthigen Bedingungen auch erfüllt, so zeigt die Symmetrie der linken Seite des Green'schen Satzes, daſs auch die rechte Seite ihren Werth nicht ändert, wenn man die Rollen von φ und ψ vertauscht. Eine directe Folgerung aus dem Vorangehenden ist daher:

$$\left.\begin{aligned}&\iint ds\cdot\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\iiint dx\,dy\,dz\cdot\psi\cdot\Delta\varphi\\&\qquad=\iint ds\cdot\varphi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial n}+\iiint dx\,dy\,dz\cdot\varphi\cdot\Delta\psi.\end{aligned}\right\}\qquad(133\,\text{a})$$

Aus diesen beiden Theoremen werden wir nun weitere Schlüsse ziehen können über die Lösungen der uns vorliegenden Differentialgleichungen.

§ 51. Eindeutigkeit der Lösungen.

Die erste für den Charakter der Potentialfunctionen wichtige Folgerung aus dem Green'schen Satze wollen wir dadurch herleiten, daſs wir die beiden in Verbindung gebrachten Functionen identificiren, also setzen

$$\varphi=\psi.$$

Die Gleichung (133) nimmt dann die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}&\iiint dx\,dy\,dz\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]\\&\qquad=-\iint ds\,\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\iiint dx\,dy\,dz\cdot\psi\cdot\Delta\psi.\end{aligned}\right\}\qquad(134)$$

Wir wollen nun annehmen, die Function ψ sei eine Lösung der Laplace'schen Differentialgleichung $\Delta\psi=0$ im ganzen Integrationsraume. Wenn dann an allen Stellen der Oberfläche dieses

Raumes entweder $\psi = 0$ ist, oder $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$, so ist die rechte Seite der vorstehenden Gleichung (134) gleich Null, also auch die linke Seite gleich Null. Diese linke Seite ist aber ein Raumintegral über eine Summe von drei Quadraten reeller Gröſsen, welche also an allen Stellen positive Werthe besitzen muſs, höchstens Null, aber niemals negativ werden kann. Das Verschwinden dieses Integrales kann nur dadurch zu Stande kommen, daſs an allen Stellen des Integrationsraumes bis an die Grenzflächen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

ist. Das heiſst aber, daſs ψ im ganzen Raume ein und denselben constanten Werth besitzt. Im Falle, daſs an der Oberfläche $\psi = 0$ gilt, gilt dies auch im ganzen Raume; wenn an der Oberfläche $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ ist, also dicht an der Grenze des Raumes beim Eindringen in ihn ψ nirgends seinen Werth ändert, so kann ψ im Inneren noch einen beliebigen, aber nur einen constanten Werth besitzen.

Nun sahen wir im Anfang des § 49, daſs zwei verschiedene Lösungen der allgemeineren Poisson'schen Differentialgleichung sich nur unterscheiden können durch das Hinzutreten einer Function, welche der Laplace'schen Differentialgleichung genügt. Nehmen wir nun an, wir hätten für ein abgeschlossenes Raumgebiet zwei Lösungen der Poisson'schen Differentialgleichung φ_1 und φ_2 gefunden, welche im ganzen Inneren entweder stetig verlaufen, oder aber die nämlichen Discontinuitäten aufweisen, und welche auſserdem an der ganzen Oberfläche dieses Gebietes gleiche Werthe besitzen, so folgt, daſs diese beiden Lösungen auch im ganzen Inneren identisch sein müssen. Denn die Differenz $\varphi_1 - \varphi_2 = \psi$ ist an der Oberfläche überall gleich Null und gehorcht im Inneren der Laplace'schen Gleichung. Darin liegt der Beweis für die eindeutige Bestimmtheit einer Lösung, welche vorgeschriebene Oberflächenwerthe erfüllt. Haben wir ein particuläres Integral gefunden, welches die Poisson'sche Gleichung befriedigt und an der Oberfläche des Integrationsraumes vorgeschriebene Werthe annimmt, so sind wir sicher, daſs es kein davon verschiedenes Integral mehr giebt, welches dasselbe leistet. Diese Sicherheit ist wichtig für den nächsten Schritt, durch den wir solche Integrale aufsuchen werden.

§ 52. Allgemeine Methode der Integration für die Differentialgleichung $\Delta\varphi = -4\pi f$.

Wir wollen den GREEN'schen Satz jetzt anwenden auf eine Function φ, welche im ganzen Integrationsraume ohne Unendlichkeitspunkte oder sonstige Discontinuitäten der Differentialgleichung

$$\Delta\varphi = -4\pi f$$

genügt. Die zweite Function ψ betrachten wir als ein analytisches Hülfsmittel und geben ihr eine bestimmte vorgeschriebene Form. Einen beliebigen festen Punkt im inneren Raume, für welchen wir den Werth von φ bestimmen wollen, bezeichnen wir durch die Coordinaten a, b, c, und setzen entsprechend der Gleichung (131) S. 199

$$\psi = \frac{1}{r}. \tag{135}$$

Die unbestimmte Constante m ist gleich 1 gesetzt. Diese Function genügt, wie wir wissen, der LAPLACE'schen Differentialgleichung

$$\Delta\psi = 0$$

mit Ausnahme der Stelle a, b, c, wo r verschwindet, also ψ über alle Grenzen wächst, unstetig wird. Diese schädliche Stelle müssen wir aus dem Integrationsraume herausschneiden; das geschieht am bequemsten durch eine kleine Kugelfläche, welche wir um das Centrum dieser Discontinuität von ψ legen. Man kann zwar das Unendlichwerden von ψ vermeiden, wenn man vorschreibt, ψ solle nur im Raume aufserhalb dieser Kugel durch (135) definirt sein, im Inneren der Kugel aber überall den constanten Werth besitzen, der in deren Oberfläche herrscht. Diese Vorstellung ist entlehnt den elektrisch geladenen Metallkugeln, in deren Innerem auch das Potential der elektrostatischen Kräfte einen constanten Werth besitzt. Indessen ist es für unsere Betrachtungen gleichgültig, welche Annahme man macht. Wenn wir nämlich ψ im inneren Kugelraume constant setzen, werden dessen erste Differentialquotienten an der Kugelfläche unstetig, und wir müssen deshalb diese Stellen ebenfalls durch eine Grenzfläche herausschneiden.

Die Functionen φ und ψ sind beide so beschaffen, dafs wir in dem Raume zwischen der kleinen Kugelfläche und der äufseren Grenzfläche des Gebietes die direct aus dem GREEN'schen Satze abgeleitete Integralgleichung (133a) anwenden dürfen. Die einzelnen dort auftretenden Oberflächen- und Raumintegrale müssen wir gesondert betrachten.

1. Das Oberflächenintegral $\iint ds \cdot \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Die Oberfläche besteht aufser der äufseren Begrenzung auch noch aus der kleinen Kugelfläche, deren Radius wir durch ϱ bezeichnen. Die Flächenelemente dieser Kugel sind dann

$$ds = \varrho^2 d\sigma,$$

die $d\sigma$ sind Flächenelemente einer Kugel vom Radius 1. An der kleinen Kugelfläche nimmt das vorstehende Integral die Form an

$$\iint \varrho^2 d\sigma \cdot \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \varrho \iint d\sigma \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}.$$

Da φ und dessen Differentialquotienten nach allen Richtungen endlich und stetig sind, wird dieser Beitrag wegen des Factors ϱ verschwinden, wenn man die Kugel verschwinden läfst. An der äufseren Begrenzung erhalten wir

$$\iint ds \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)}{r}.$$

Dieser Ausdruck ist gebildet wie (131a), nur haben wir hier statt der Summirung eine Integration über die Grenzfläche; er kann also gedeutet werden als eine Potentialfunction, welche herrührt von einer Ansammlung von Dichtigkeiten. Auf jedem Oberflächenelement ist die Masse $ds \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ zu denken, es ist das also eine einfache Schicht von der Flächendichtigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$.

2. Das Oberflächenintegral $\iint ds \cdot \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n}$. An der kleinen Kugelfläche fällt die ins Innere des Raumes gerichtete Normale mit der Richtung der wachsenden r zusammen. Es ist daher

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\right)_{r=\varrho} = -\frac{1}{\varrho^2}$$

also $ds \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} = -d\sigma$. Die Gröfse ϱ^2 hebt sich in Zähler und

Nenner, das Integral bleibt endlich, wenn der Kugelradius gegen Null strebt. Der Werth von φ nähert sich an allen Stellen dabei immer mehr demjenigen, welcher im Mittelpunkte (a, b, c) herrscht. Beim Uebergang zur Grenze $\varrho = 0$ dürfen wir daher φ, als den festen Werth $\varphi\,(a, b, c)$ vor das Integral setzen; es bleibt dann nur $\iint d\sigma$ zu bilden übrig. Dies ist aber die gesammte Oberfläche der Einheitskugel, welche bekanntlich den Betrag 4π besitzt, der Antheil dieses Integrales ist also

$$-4\pi \cdot \varphi\,(a, b, c)\,.$$

An der äufseren Begrenzung ist dieses Integral

$$\iint ds \cdot \varphi \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}.$$

Den Sinn dieses Ausdruckes müssen wir uns veranschaulichen. Legen wir in dem verschwindenden, aber überall gleich grofsen Abstand dn von der äufseren Begrenzung eine zweite Fläche, welche sich natürlich in ihrer ganzen Gestalt eng an die äufsere Grenzfläche anschmiegt, und denken wir diese Doppelfläche belegt mit Massen, deren Flächendichtigkeiten auf der Innenseite $+\frac{\varphi}{dn}$, auf der Aufsenseite $-\frac{\varphi}{dn}$ sind, so wird jede dieser beiden Belegungen eine Potentialfunction veranlassen. Bezeichnen wir mit r den Abstand des Punktes a, b, c von einem Flächenelement ds der äufseren negativ belegten Schicht, so ist die dadurch erzeugte Potentialfunction

$$-\iint ds \frac{\varphi}{dn} \cdot \frac{1}{r}.$$

An der inneren positiv belegten Schicht erhalten wir einen ebensolchen Ausdruck, doch haben die Factoren $\frac{1}{r}$ einen um den Schritt dn veränderten Werth. Man mufs hier dafür setzen

$$\frac{1}{r} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} dn$$

und erhält als Potentialfunction der inneren Schicht

$$+\iint ds \frac{\varphi}{dn} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} dn\right).$$

Beide Potentialfunctionen superponiren sich. Dabei hebt sich erstens $-\frac{1}{r} + \frac{1}{r} = 0$, dann aber auch dn in Zähler und Nenner und es bleibt das Gebilde übrig, welches uns in dem zweiten Flächenintegral entgegentrat. Es ist dies das Potential einer sogenannten Doppelschicht. Das Product aus Flächendichtigkeit $\pm \frac{\varphi}{dn}$ und Normalabstand dn der beiden Schichten nennt man das Moment der Doppelschicht. Es erhält bei uns den Werth φ, welcher an den verschiedenen Stellen der Begrenzung unseres Raumgebietes herrscht.

3. Das Raumintegral links $\iiint dx\,dy\,dz \cdot \psi \cdot \Delta\varphi$ erhält den Werth

$$-4\pi \iiint dx\,dy\,dz \cdot \frac{f}{r}$$

und erscheint (bis auf den Factor -4π) als Potentialfunction der im Integrationsraume verbreiteten räumlichen Dichtigkeit f. Dafs dieses Integral beim Verschwinden des Kugelradius unendlich werden sollte, ist nicht zu befürchten. Zwar wird dort $\frac{1}{\varrho}$ über alle Grenzen wachsen, aber das Raumelement, in dem dies eintritt, nimmt ab proportional ϱ^3. Es ist für den Werth dieses Integrales also ganz gleichgültig, ob man die kleine Kugel ausschliefst oder ob man über den ganzen Innenraum integrirt.

4. Das Raumintegral rechts $\iiint dx\,dy\,dz \cdot \varphi \cdot \Delta\psi$ verschwindet, weil $\Delta\psi = 0$ ist. Die Ausschliefsung des Kegelcentrums ist aber wesentlich dabei. Stellen wir nun unsere vier ausgewertheten Integrale zusammen nach dem Schema der Gleichung (133a), so erhalten wir

$$\iint ds \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)}{r} - 4\pi \iiint dx\,dy\,dz\,\frac{f}{r} = -4\pi\,\varphi(a,b,c) + \iint ds\,\varphi\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}$$

oder:

$$\varphi(a,b,c) = \iiint dx\,dy\,dz\,\frac{f}{r} - \frac{1}{4\pi}\iint ds\,\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)}{r} + \frac{1}{4\pi}\iint ds\,\varphi\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}. \quad (136)$$

Diese Gleichung stellt den gesuchten Werth φ in jedem beliebigen Punkte (a, b, c) des Integrationsraumes dar, bedeutet also eine gültige Lösung der vorgelegten Differentialgleichung. Die Auswerthung des Raumintegrales bereitet keine begrifflichen (höchstens rechnerische) Schwierigkeiten, da die Function f durch die Aufgabe selbst vorgeschrieben ist: Dieses erste Glied besitzt einen für jeden Ort sicher angebbaren Werth, es stellt mithin eine bekannte Function der Coordinaten (a, b, c) dar. Die Schwierigkeit besteht in der Ermittelung der beiden Oberflächenintegrale, welche die Kenntnifs der Werthe von φ und von $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ an der Begrenzung voraussetzt. Die Grenzbedingungen sind nun bei den elastischen Problemen (und ebenso bei den elektrischen und magnetischen) selten in der Form gegeben, dafs gerade diese erforderlichen Werthe direct vorgeschrieben sind. An diesem Umstande scheitert häufig diese allgemeine Integrationsmethode und man ist auf Suchen nach geeigneten Functionsformen, z. B. auf Benützung der Lösungen der umgekehrten Aufgaben angewiesen.

Das Raumintegral ist derjenige Theil der Lösung, welcher bewirkt, dafs φ der Poisson'schen Differentialgleichung genügt; die beiden Oberflächenintegrale genügen der Laplace'schen Differentialgleichung. Das entspricht durchaus der im Anfang von § 49 erkannten Eigenschaft, dafs man aus einem einzigen particulären Integrale der Poisson'schen Gleichung jede mögliche Lösung herleiten kann durch Hinzufügung von Integralen der Laplace'schen Gleichung. Dafs letztere Zusatzglieder hier in unserer Lösung (136) gerade als Potentialfunctionen einer einfachen und doppelten Schicht in der Grenzfläche auftreten, ist eine Besonderheit; es wäre wohl möglich geeignete Zusatzglieder zu dem particulären Raumintegral zu finden, welche herrühren von räumlichen Dichtigkeiten, die im äufseren Raum jenseits der Grenze des Integrationsgebietes so angebracht sind, dafs gerade die besonderen Grenzbedingungen dadurch befriedigt werden. Offenbar würde dann die Lösung φ ihre Gestalt nicht ändern, wenn wir die Grenze des Gebietes wegnehmen und alle die jenseits angenommenen Dichtigkeiten noch mit zu der durch die Function f definirten Vertheilung hinzurechen, und dem entsprechend auch mit in das Raumintegral der Gleichung (136) aufnehmen. Um den so beliebig erweiterten Integrationsbereich ist aber immer wieder eine geschlossene Oberfläche zu denken, über welche die beiden Oberflächenintegrale zu erstrecken sind. So kann man weiter vorgehen und steht schliefslich vor der Frage: Unter welchen Voraussetzungen kann man sich durch das unendlich weite Hinausrücken der Umgrenzung von den lästigen Oberflächenbedingungen befreien? Es müssen offenbar die beiden Flächenintegrale in (136) verschwinden, obwohl die Oberfläche beim Uebergang zur Grenze ins Unendliche wächst. Wir können zuvor beide Integrale vereinigen und mit dem Integranden eine leichte Umformung vornehmen:

$$-\frac{1}{4\pi}\iint ds\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right\}=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{ds}{r^2}\left\{\frac{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}}{\frac{1}{r^2}}\right\}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{ds}{r^2}\frac{\partial(\varphi r)}{\partial n}.$$

Als Gestalt der Begrenzung wählen wir eine grofse Kugeloberfläche, deren Centrum im Punkte a, b, c liegt, und deren Radius durch R bezeichnet sei. Dann ist $ds = R^2 d\sigma$. Das Quadrat des grofsen Radius hebt sich gegen das im Nenner stehende r^2, welches ja an sämmtlichen Stellen ebenfalls gleich R^2 zu setzen ist, weg. Das Integral ist nur noch über die endliche Fläche der Einheitskugel zu erstrecken

$$=+\frac{1}{4\pi}\iint d\sigma\cdot\left(\frac{\partial(\varphi r)}{\partial r}\right)_{r=R}$$

und verschwindet, sobald der Integrand verschwindet. Dies tritt nun ein, wenn in sehr grofsen Entfernungen das Product $\varphi\cdot r$ sich nicht mehr ändert, wenn man auch den Abstand r verändert. Die Bedingung für das Verschwinden ist also

$$\lim_{r=\infty}\varphi\cdot r=\text{Const};$$

in sehr grofser Entfernung R vom Punkte a, b, c mufs also die Function abnehmen wie

$$\varphi=\frac{\text{Const}}{R}.$$

Diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn die Dichtigkeiten f nur im Endlichen liegen. Es ist dann auch gleichgültig, ob nur endliche

Raumdichtigkeiten vorliegen, oder Concentrationen in Punkten, Curven, Flächen dazutreten. Sobald die gesammte Masse

$$M = \iiint dx\,dy\,dz \cdot f$$

endlich ist bei beliebig weiter Erstreckung des Integrales, ist die Bedingung erfüllt, und wir dürfen als Integral der Differentialgleichung $\Delta \varphi = -4\pi f$ ansetzen

$$\varphi = \iiint^{\infty} dx\,dy\,dz \cdot \frac{f}{r}, \tag{137}$$

das Raumintegral über den gesammten Raum erstreckt. Oberflächenintegrale treten dann nicht mehr hinzu. Ja es ist sogar möglich, dafs die Gesammtmasse M im unendlichen Raume logarithmisch unendlich wird ohne das φ aufhört endlich zu bleiben. Dies findet statt, wenn die Dichtigkeit f in grofsen Entfernungen abnimmt wie $\frac{1}{r^3}$. Für unsere elastischen Probleme ist also das wichtigste Resultat, dafs wir in einem sehr weit ausgedehnten continuirlich mit Masse gefüllten Körper, auf den bekannte Massenkräfte nur in einem beschränkten inneren Bereich wirken, zunächst die Gröfsen ω, λ, μ, ν, welche Differentialgleichungen von der Poisson'schen Form genügen, durch eine allgemeine Integrationsmethode gefunden werden können. Wir brauchen in die Gleichung (137) für f nur die durch 4π dividierten bekannten rechten Seiten der Gleichungen (125 und 125 a) S. 194 einzusetzen, und dann zur Erfüllung der nothwendigen Beziehung (127) eventuell noch durch eine ebensolche Rechnung die Function χ entsprechend der Differentialgleichung (128 a) zu bilden, aus welcher dann mittels (128 b) die allen Bedingungen genügenden Lösungen zu finden sind.

Für unbegrenzte Substanzen ist der Weg der Behandlung hiermit angegeben.

§ 53. Bestimmung der den vorhergehenden Lösungen entsprechenden Verrückungen.

Die Gröfsen ω, λ, μ, ν, welche wir im Vorhergehenden wenigstens für einen Raum ohne Grenzbedingungen nach einer allgemeinen Methode aufgefunden haben, sind nun nicht eigentlich die gesuchten Functionen. Wir haben sie nur benützt, weil sich für diese getrennte (nicht simultane) Differentialgleichungen aufstellen liefsen.

Man hat indessen ein analytisches Hülfsmittel, um die Verbindung zwischen ξ, η, ζ einerseits und ω, λ, μ, ν andererseits herzustellen. Die seit dem Anfange dieses Bandes bekannten Ausdrücke welche ω, λ, μ, ν durch die ersten Differentialquotienten der ξ, η, ζ ausdrücken, sind hiermit nicht gemeint, diese können uns nicht nützen; aber man kann vier neue Hülfsfunctionen Ω, Λ, M, N einführen, durch deren Differentialquotienten die Verrückungscomponenten in folgender charakteristischer Weise zusammengesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) \\ \eta &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \\ \zeta &= \frac{\partial \Omega}{\partial z} - \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial \Lambda}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

Ein solcher Ansatz ist auf jeden Fall möglich, denn wir haben links drei Functionen, rechts aber die Differentialquotienten von vier neuen. Wir haben sogar für letztere noch Spielraum, abgesehen von additiven Constanten, welche bei der Differentiation herausfallen. Bilden wir nun die im Vorhergehenden gefundenen Gröfsen! Erstens:

$$\omega \equiv \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Alle Glieder in (138), welche Λ, M, N enthalten, heben sich paarweise und es bleibt

$$\omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = \Delta \Omega. \tag{139}$$

Bilden wir zweitens

$$2\lambda \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z},$$

so fallen die Glieder, welche Ω enthalten, heraus und man erhält der Reihe jener Glieder nach

$$2\lambda = -\frac{\partial^2 M}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 N}{\partial x \cdot \partial z}.$$

Diesen Ausdruck kann man übersichtlicher machen, indem man die sich vernichtenden Glieder

$$+\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2}$$

hinzufügt. Man erhält dann ein positives vollständiges $\Delta \Lambda$ und drei negative Glieder, welche sämtlich nach x differenzirt sind:

$$2\lambda = \Delta \Lambda - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right). \tag{139a}$$

Durch analoge Rechnungen, die wir nicht gesondert auszuführen brauchen, findet man noch:

$$2\mu = \Delta M - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right). \tag{139b}$$

$$2\nu = \Delta N - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right). \tag{139c}$$

Da wir nun zur Darstellung der drei Functionen ξ, η, ζ hier vier Hülfsfunctionen Ω, Λ, M, N eingestellt haben, so dürfen wir diesen noch eine vierte Bedingung auferlegen. Es soll nämlich überall gelten

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0. \tag{140}$$

Die Art, wie man diese Bedingung befriedigen kann, ist ganz entsprechend derjenigen, welche wir bei der Befriedigung der Forderung (127) dargelegt haben. Sollte man Werthe für Λ, M, N gefunden haben, welche die Bedingung (140) nicht erfüllen, so kann man immer eine Function X (grofs Chi), welche einer POISSON'schen Differentialgleichung analog (128a) genügt, finden und deren erste Differentialquotienten, analog (128b), zusetzen. Die Ueberlegung ist wörtlich dieselbe, nur treten hier die griechischen Majuskeln an Stelle der dort vorkommenden Minuskeln.

Nach Befriedigung dieser Bedingung (140) lauten aber die gewonnenen Ausdrücke: (139 nebst a, b, c)

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \Delta \Omega \\ 2\lambda &= \Delta \Lambda \\ 2\mu &= \Delta M \\ 2\nu &= \Delta N. \end{aligned}\right\} \tag{141}$$

Das giebt also wieder Differentialgleichungen von demselben Typus, denn man hat die links stehenden Gröſsen als bereits gefundene Functionen anzusehen, die rechts stehenden sind durch diese Gleichungen charakterisirt als Potentialfunctionen, welche zu den links gegebenen Dichtigkeiten gehören. Unter Dichtigkeiten versteht man nun in der Physik gewöhnlich ungerichtete Gröſsen, und die davon gebildeten Potentiale sind dann ebenfalls ungerichteter Natur. Die Begriffe ω und Ω entsprechen diesem Sinne auch, die drei anderen Paare sind allerdings formell durch dieselbe Beziehung verknüpft, aber die λ, μ, ν sind Componenten eines Vectors. Um diesen begrifflichen Unterschied anzudeuten, nennt man $\varLambda$, M, N Vectorpotentiale.

Man kann nun auch die beiden Stufen der Integration: die erste, durch die man von den gegebenen Kräften aufsteigt zu den ω, λ, μ, ν, und die zweite, welche von da aus zu den Ω, $\varLambda$, M, N führt, in einer Vorschrift vereinigen, wenn man aus den vier Gleichungen (125 und a) und aus den vier Gleichungen (141) direct folgende zusammensetzt:

$$\left.\begin{aligned}
\varDelta\varDelta\Omega &= -\frac{\mu'}{2K(1+\theta)}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\\
\varDelta\varDelta\varLambda &= -\frac{\mu'}{K}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\\
\varDelta\varDelta M &= -\frac{\mu'}{K}\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\\
\varDelta\varDelta N &= -\frac{\mu'}{K}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{142}$$

Hat man diese integrirt, so liefert (138) direct ξ, η, ζ. Es ist nun auch in der That gelungen, solche Integralformen aufzufinden, welche dieser Art von Differentialgleichungen genügen. Das gemeinsame Schema dieser Gleichungen ist:

$$\varDelta\varDelta\Phi = -4\pi f,\tag{143}$$

wo f die vorgeschriebene, Φ die gesuchte Function der Coordinaten ist. Betrachten wir nämlich

$$r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

so ist

$$\frac{\partial r}{\partial a} = -\frac{x-a}{r}$$

und

$$\frac{\partial^2 r}{\partial a^2} = \frac{1}{r} + \frac{x-a}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial a} = \frac{1}{r} - \frac{(x-a)^2}{r^3}.$$

Denselben Werth hätte man auch für $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$ gefunden; wir differenziren hier aber mit Absicht nach a, b, c, und stellen neben diese Formel noch die zwei entsprechenden

$$\frac{\partial^2 r}{\partial b^2} = \frac{1}{r} - \frac{(y-b)^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial c^2} = \frac{1}{r} - \frac{(z-c)^2}{r^3}.$$

Bei der Addition der drei Formeln findet man

$$\Delta r = \frac{3}{r} - \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{r^3} = \frac{2}{r}.$$

Es ist also:

$$\Delta \frac{r}{2} = \frac{1}{r}. \tag{144}$$

Wendet man nun die Operation Δ nochmals an, so kommt

$$\Delta \Delta \frac{r}{2} = \Delta \frac{1}{r} = 0. \tag{144a}$$

Der Ausdruck wird Null, weil $\frac{1}{r}$ die Laplace'sche Differentialgleichung erfüllt mit Ausnahme des Centrums $r = 0$.

Betrachten wir nun das allgemeine Integral der Poisson'schen Gleichung, welches in (137) gegeben ist, so können wir es auffassen als Raumintegral einer Function, deren einer Factor f ist, der andere das einfachste Integral $\frac{1}{r}$ der Laplace'schen Differentialgleichung.

Ganz analog setzen wir hier für unsere Differentialgleichung (143) ein Integral Φ an über das Product der Function f und der einfachsten Lösung der Gleichung $\Delta \Delta \Phi = 0$, das ist also $\frac{r}{2}$:

$$\Phi = \iiint\limits^{\infty} dx\, dy\, dz \cdot \frac{r}{2} \cdot f. \tag{145}$$

Dies soll der Werth sein, den die gesuchte Function in einem beliebig gewählten festen Raumpunkt a, b, c besitzt. Dem entspricht rechts r als Abstand der einzelnen Volumelemente von diesem festen Centrum. Im Integranden $\frac{r}{2} \cdot f$ sind also x, y, z die Variabeln, während a, b, c in r als feste Parameter auftreten. Durch die Integration über den unbegrenzten Raum verschwinden die Variabelen x, y, z, das Raumintegral, bedingt durch die gesammte Vertheilung von f, ist nur Function von a, b, c. Eine solche als bestimmtes Integral gegebene Function, deren Variabele nicht in den Integralgrenzen, sondern nur im Integrandus vorkommen, differenzirt man bekanntlich, indem man unter dem Integralzeichen nach diesen Parametern differenzirt. Das werden wir brauchen zur Verificirung unserer Lösung (145).

Bilden wir nämlich $\varDelta\, \Phi$, indem wir zweimal nach a, b, c differenziren und die Differentialquotienten addiren, so erhalten wir, da im Integranden rechts nur $\frac{r}{2}$ von a, b, c abhängt:

$$\varDelta\, \Phi = \iiint^{\infty} dx\, dy\, dz \cdot \left(\varDelta \frac{r}{2}\right) \cdot f,$$

also laut (144)

$$\varDelta\, \Phi = \iiint^{\infty} dx\, dy\, dz \frac{f}{r} = \varphi\, .$$

Hier ist φ das Integral (137) der Poisson'schen Differentialgleichung. Bei nochmaliger Anwendung der Operation $\varDelta$ kommt:

$$\varDelta\varDelta\, \Phi = \varDelta\, \varphi = -4\pi f,$$

was zu beweisen war. Der Ausdruck (145) genügt also in der That der Gleichung (143) im ganzen unbegrenzten Raume. Sein Werth ist sicher endlich, wenn die Dichtigkeiten f eine nur in endlicher Entfernung vorhandene Vertheilung anzeigen. Wird das Integral in einem bestimmt begrenzten Körper gefordert, und sind bestimmte Grenzbedingungen zu erfüllen, so mufs man suchen, letztere durch additiv hinzugefügte Lösungen der Differentialgleichung

$$\varDelta\varDelta\, \Psi = 0 \tag{146}$$

zu befriedigen. Solche Lösungen sind nach Gleichung (144a) Ausdrücke von der Form $\frac{r}{2}$, wobei die Centra, von denen aus die r gemessen werden, aufserhalb des Körpers zu suchen sind. Wegen der Homogeneität der Differentialgleichung (146) kann man auch noch beliebige constante Factoren zu $\frac{r}{2}$ zusetzen, so dafs dabei auch der Factor $\frac{1}{2}$ ohne Bedeutung ist. Eine allgemeine Methode, solche Zusatzglieder für bestimmte Grenzbedingungen aufzufinden, kennt man aber ebenso wenig, wie bei den durch einfache Δ gebildeten Differentialgleichungen.

§ 54. Bewegungen in elastischen Körpern.

Es sollen als letztes Thema dieses Bandes im Folgenden die einfachsten und wichtigsten Bewegungserscheinungen behandelt werden, welche in isotropen Körpern durch die elastischen Kräfte in Folge einer Störung des Gleichgewichts hervorgerufen werden.

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen wurden bereits im zweiten Theil dieses Bandes aufgestellt, siehe Gleichungen (68) auf Seite 130, und wir können uns hier auf die dort gegebenen Erläuterungen beziehen. Die in jenen drei Gleichungen auf der rechten Seite an erster Stelle auftretenden Beschleunigungscomponenten X, Y, Z der äufseren Massenkräfte werden, wenn es sich um dauernd gleichmäfsig wirksame Naturkräfte handelt, wie z. B. die Schwerkraft, nach einer Störung der Ruhe immer zu einem neuen Gleichgewichtszustand führen, welcher sich herstellt, nachdem die erzeugten Bewegungen durch Dämpfungskräfte verschiedener Art — Reibungen — vernichtet sind. Bei dem Verlaufe der Bewegungen aber spielen diese äufseren Kräfte häufig nur eine secundäre Rolle, die man aufser Acht lassen darf. Wir wollen nur zur Veranschaulichung einige der Ausnahmefälle anführen, in denen sie ebenso wichtig werden, wie die elastischen Innenkräfte: Unter einem physischen Pendel versteht die Mechanik gewöhnlich einen Körper, welcher um eine feste horizontale Axe drehbar, dem Antrieb der Schwerkraft folgt. Wird aber die Aufhängung des Pendelkörpers durch ein Stück Stahlband vermittelt, welches sowohl in ihm wie in dem starren unbeweglichen Halter festgeklemmt ist, so üben die elastischen Kräfte bei der Biegung dieses Stahlstückes eine Wirkung, gegen welche die der Schwerkraft nicht vernachlässigt werden darf. Auch die Torsionsschwingungen eines an steifem Draht aufgehängten Magnetstabes verlangen Beachtung der äufseren magnetischen Kräfte. Endlich giebt es mancherlei Einrichtungen, durch welche man auf elastische Körper äufsere Kräfte wirken läfst, welche in vorgeschriebener Weise in der Zeit periodisch wechseln, und dadurch dauernd Bewegungen unterhalten, welche man erzwungene Schwingungen nennt. Die X, Y, Z sind dann als bekannte Zeitfunctionen in die Bewegungsgleichungen einzusetzen. Im ersten Bande wurde an dem Schema eines Massenpunktes das Zusammenwirken einer periodischen äufseren, einer elastischen inneren und einer dämpfenden Kraft ausführlich behandelt. Vergl. Bd. I, S. 119—134. Mit derartigen zusammengesetzten Problemen wollen wir uns hier nicht beschäftigen; wir wollen vielmehr voraussetzen, dafs die Bewegungen lediglich durch die inneren elastischen Kräfte und durch die Trägheit der Substanz unterhalten werden. Wir setzen also $X = Y = Z = 0$ und erhalten auf Grundlage der Gleichungen (68):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{K}{\mu'} \varDelta \xi + \frac{K}{\mu'}(1 + 2\theta)\frac{\partial \omega}{\partial x}\\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \frac{K}{\mu'} \varDelta \eta + \frac{K}{\mu'}(1 + 2\theta)\frac{\partial \omega}{\partial y}\\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \frac{K}{\mu'} \varDelta \zeta + \frac{K}{\mu'}(1 + 2\theta)\frac{\partial \omega}{\partial z}\,.\end{aligned}\right\} \qquad (147)$$

Diese Gleichungen sind identisch mit den am Schlusse von § 33 angeführten Gleichungen (67a). Die Gleichungen (70), welche nur H und K, statt K und θ als Elasticitätscoefficienten führen, brauchen wir nicht weiter zu verfolgen, denn der Uebergang vom einen zum anderen System kann überall leicht mit Hülfe der Tabelle (87) auf S. 153 besorgt werden.

Dies sind nun wieder drei simultane homogene partielle Differentialgleichungen für ξ, η, ζ, denn ω ist nur Abkürzung für

$$\omega = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\,.$$

Die gesuchten Functionen hängen jetzt ab von vier Variabeln x, y, z, t. Wir können aus ihnen durch dieselben Operationen, die im § 48 für das Gleichgewichtsproblem unter äufserer Kraftwirkung zum Ziele führten, auch hier neue Differentialgleichungen bilden, in denen die Variabelen ω, λ, μ, ν getrennt sind. Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Differentiationen nach der Zeit und nach den Coordinaten, also Stetigkeit des zeitlichen Verlaufes und der räumlichen Anordnung sind dabei freilich vorausgesetzt. Differenzirt man in (147) die erste Gleichung nach x, die zweite nach y, die dritte nach z und addirt alle drei Resultate, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{K}{\mu'} \cdot \Delta \omega + \frac{K}{\mu'} (1 + 2\,\theta)\, \Delta \omega$$

oder besser zusammengefafst:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{2\,K(1+\theta)}{\mu'} \Delta \omega. \tag{148}$$

Differenzirt man die dritte nach y, die zweite nach z, und zieht letztere von der vorigen ab, so hebt sich das ω-führende Glied, die Differentialquotienten von η und ζ treten zu der uns bekannten Rotationscomponente $2\,\lambda$ zusammen; der Factor 2 hebt sich ebenfalls und es bleibt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} &= \frac{K}{\mu'} \Delta \lambda \\ \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} &= \frac{K}{\mu'} \Delta \mu \\ \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} &= \frac{K}{\mu'} \Delta \nu. \end{aligned}\right\} \tag{148a}$$

Die zweite und dritte dieser Gleichungen sind ohne weiteres zugefügt worden, da sie sich durch die entsprechenden Operationen mit den anderen Gleichungspaaren in (147) ergeben. Als nothwendige Bedingung für die Lösungen der drei Gleichungen (148a) tritt wieder die Gleichung

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0 \tag{148b}$$

hinzu.

Das gemeinsame Schema der vier Differentialgleichungen (148) und (148a) ist

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi. \tag{149}$$

Die Constante auf der rechten Seite ist als Quadrat c^2 bezeichnet einmal, weil sie einen nothwendig positiven Betrag anzeigt, und zweitens, weil wir nachher viel mit ihrer Quadratwurzel zu thun haben, die nun durch das einfache Zeichen c angegeben wird. Ihrer Dimension nach ist die Constante c^2 das Quadrat einer Geschwindigkeit. Das kann man direct aus der Differentialgleichung ablesen, denn links steht im Nenner das Quadrat des Zeitelementes, rechts in dem Δ stehen im Nenner die Quadrate der Längenelemente. Man kann den Nachweis aber auch führen, indem man die Ausdrücke von c^2 in den vier Gleichungen prüft. Die Constante K im Zähler ist von der Dimension „Kraft durch Fläche“: $[M L^{-1} T^{-2}]$, die Dichtigkeit μ' „Masse durch Volumen“: $[M L^{-3}]$. Dies giebt ebenfalls die Forderung

$$c^2 = [L^2 T^{-2}] = \text{Geschwindigkeitsquadrat.}$$

Wir werden nachher sehen, dafs die durch diese Differentialgleichungen bestimmten Vorgänge Wellenbewegungen sind, welche mit der Geschwindigkeit c fortschreiten. Man nennt deshalb diese in verschiedenen Gebieten der Physik auftretende und eingehend studirte Differentialgleichung kurz die Wellengleichung. Da sie linear und homogen ist, gelten für ihre verschiedenen Integrale zum Theil die gleichen Regeln, welche wir bereits bei der Laplace'schen Differentialgleichung fanden. Erstens ist die Summe mehrerer Lösungen auch eine Lösung. Verschiedene Wellensysteme superponiren sich und laufen ab, ohne sich zu stören. Auch beliebige Differentialquotienten gefundener Lösungen sind wieder Lösungen, nur mufs man Acht darauf geben, ob nicht die Differentialquotienten irgendwo oder -wann unstetig werden, während die ursprünglichen Werthe regulär verlaufen. Solche Stellen oder Zeiten mufs man dann aus dem Gültigkeitsbereich der neuen Lösungen ausscheiden.

Um von den ω, λ, μ, ν überzugehen zu den Verrückungen ξ, η, ζ kann dasselbe Mittel dienen, welches wir bei den Gleichgewichtsproblemen benützten. Wir führen auch hier durch die Gleichungen (138), welche am Anfang des § 53 aufgestellt wurden, die Hülfsfunctionen Ω und Λ, M, N (Vectorpotentiale) ein, diese sind aber jetzt auch Functionen der Zeit. Die Nebenbedingung (140) soll auch hier zu allen Zeiten erfüllt sein. Dann ist, ganz wie dort in Gleichungen (141), auch hier:

$$\omega = \Delta\,\Omega, \quad 2\,\lambda = \Delta\,\Lambda, \quad 2\,\mu = \Delta\,M, \quad 2\,\nu = \Delta\,N.$$

Die unserer nicht näher bezeichneten Function φ entsprechende Hülfsfunction nennen wir Φ, also

$$\varphi = \Delta\,\Phi. \tag{150}$$

Die Wellengleichung für φ geht dann über in

$$\frac{\partial^2 \Delta\,\Phi}{\partial t^2} = c^2 \Delta\,\Delta\,\Phi. \tag{150a}$$

Darf man nun links die Reihenfolge der Differentiationen nach Zeit und Raum vertauschen, was sicher erlaubt ist, wenn der Bewegungszustand zeitlich und räumlich stetig verlaufend vorausgesetzt wird, so erhalten wir

$$\varDelta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \varDelta (c^2 \varDelta \Phi). \tag{150b}$$

Dadurch sind die $\varDelta$ zweier Functionen einander gleichgesetzt. Es ist zwar nicht nothwendig, dafs die beiden Functionen deshalb selbst übereinstimmen müssen, aber sie können sich doch nur um ein additives Glied unterscheiden, dessen $\varDelta$ gleich Null ist, also um ein Integral der LAPLACE'schen Differentialgleichung, welches jetzt freilich noch die Zeit als Variabele enthalten darf. Hinreichend aber für die Befriedigung von (150b) ist die Bedingung:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \varDelta \Phi. \tag{150c}$$

Das ist nun wieder dieselbe Wellengleichung auch für die Hülfsfunction. Nehmen wir an, das φ wäre bereits gefunden, so können wir andererseits auch aus (150) und (150c) zusammensetzen:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \varphi, \tag{150d}$$

eine Differentialgleichung, deren Integration nach t keine begrifflichen Schwierigkeiten bereitet. Die hinzutretenden Integrationsconstanten können dabei aber diesmal von den Raumcoordinaten abhängen, und alle diese hinzutretenden unbestimmten Bestandtheile müssen den vorgeschriebenen räumlichen Grenz- und zeitlichen Anfangsbedingungen angepafst werden. Auch derartige Aufgaben sind für begrenzte Körper nur in einigen Fällen allgemein gelöst werden. So weit man die elastische Substanz als unbegrenzt ansehen darf, hat man indessen auch hier allgemeine Methoden der Integration gefunden. Mit den einfachsten Problemen dieser Art wollen wir uns hier noch beschäftigen.

§ 55. Ebene Wellen.

Gelingt es, durch eine geeignete Art der Erregung in der Substanz eine Bewegung derart einzuleiten, dafs die veränderlichen Functionen aufser von der Zeit t nur noch von einer einzigen Coordinate, z. B. x, abhängen, so ist es leicht, die allgemeine Lösung zu finden. Da unter dieser Annahme φ in jeder zu x senkrechten Ebene überall (wenigstens bis in grofse Entfernung von dem betrachteten Bereich) ein und denselben Werth besitzen mufs, also von y und z unabhängig anzusetzen ist, wird die Wellengleichung (149) die einfachere Form annehmen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \tag{151}$$

Eine sehr allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung findet man, wenn man eine beliebige eindeutige und stetige Function $F(s)$ aufstellt und dem Argument s die besondere Form giebt

$$s = x - c t \tag{152}$$

also

$$\varphi = F(x - c t). \tag{152a}$$

Es ist dann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{d F}{d s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = - c \cdot \frac{d F}{d s}$$

und

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = + c^2 \frac{d^2 F}{d s^2}$$

Ferner

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d F}{d s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{d F}{d s}$$

und

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2 F}{d s^2}.$$

Also wird durch (152a) thatsächlich unsere Differentialgleichung befriedigt, ohne dafs über die Gestalt der Function $F(s)$ andere Voraussetzungen zu machen sind als die zweimalige Differenzirbarkeit.

Wir wollen uns zunächst anschaulich machen, was eine solche willkürlich vorgeschriebene Function des Argumentes $(x - c t)$ für eine physikalische Erscheinung bezeichnet. Die Zeit t ist in unserer Anschauung eine unaufhaltsam und gleichförmig wachsende unabhängige Variabele. Beobachten wir also an irgend einer festen Stelle des Raumes mit der Abscisse x_0 den Verlauf dieser Lösung φ, so müssen deren Werthe in derselben Weise wechseln, wie die der Function F, wenn man darin das Argument s gleichmäfsig abnehmen läfst. Wenn wir aber den Beobachtungsort in der positiven x-Richtung mit der constanten Geschwindigkeit c wandern lassen, so dafs seine Abscisse

$$x = x_0 + c\,t$$

zu setzen ist, so wird das Argument der Function F

$$s = x_0 + c\,t - c\,t = x_0,$$

also es bleibt unverändert, wir finden daher während dieser Wanderung des Beobachtungspunktes immerfort denselben Werth von φ vor. Dabei ist es ganz gleichgültig, von welcher Stelle x_0 wir ausgegangen sind.

Die gesammte Vertheilung des Werthes φ im Raume rückt also, ohne dafs deren Bild sich ändert, mit der Geschwindigkeit $+c$ in der x-Richtung vorwärts. Ist beispielsweise $F(s)$ so beschaffen, dafs nur in einem gewissen Intervall der Werth von Null verschieden ist, aufserhalb aber sowohl von $+\infty$ an, wie auf der anderen Seite bis $-\infty$ hin immer verschwindet, so wird der fortschreitende Bewegungszustand ruhende Theile ergreifen, über sie hinwegziehen und sie schliefslich wieder in ihrer ursprünglichen Lage ruhen lassen. Einen solchen Vorgang nennt man eine Wellenbewegung, und zwar haben wir hier im Besonderen eine geradlinig fortschreitende ebene Wellenbewegung charakterisirt.

Ein zweites Integral, aus einer anderen willkürlichen Function $G(s)$ gebildet, finden wir, wenn wir $s = x + c\,t$ setzen

$$\varphi = G(x + c\,t). \tag{152b}$$

Der Nachweis der Gültigkeit erfolgt ganz wie oben, denn für den zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$, in welchem c^2 heraustritt, ist es gleichgültig, ob $-c$ oder $+c$ genommen wird. Die physikalische Bedeutung ist eine in der negativen x-Richtung mit derselben absoluten Geschwindigkeit fortgepflanzte ebene Wellenbewegung. Da die Differentialgleichung homogen-linear ist, so gilt das Superpositionsprincip, und es läfst sich zeigen, dafs das Integral

$$\varphi = F(x - c\,t) + G(x + c\,t) \tag{153}$$

die vollständige Lösung ist, durch welche alle überhaupt möglichen ebenen Wellenbewegungen in der x-Richtung dargestellt werden. Auf diese Vorstellung zweier in entgegengesetzten Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit übereinander wegziehender unveränderlicher Wellen kann man in jedem Falle den Bewegungsvorgang zurückführen.

Man kann sogar einige besonders einfache Grenzbedingungen dadurch befriedigen. Wird z. B. durch irgend welche Umstände herbeigeführt, dafs φ in der Ebene $x = 0$ immer gleich Null sein mufs, so liefert die allgemeine Lösung für diesen Fall die Bedingung, dafs zu allen Zeiten

$$F(-ct) + G(+ct) = 0$$

sein mufs. Die beiden bisher unabhängigen Functionen F und G werden dann verknüpft durch die Bedingung

$$F(-s) = -G(+s).$$

Die Lösung, welche dieser Grenzbedingung für die Ebene $x = 0$ genügt, lautet daher:

$$\varphi = -G(ct - x) + G(ct + x). \tag{153a}$$

Nehmen wir beispielsweise an, die rechte Hälfte des Raumes ($x > 0$) sei von elastischer Substanz erfüllt, die linke Hälfte ($x < 0$) aber sei leer und keinerlei Kräfte beeinflufsten von dorther die freie Stirnfläche $x = 0$. Läuft dann eine ebene Volumdilatationswelle (Verdünnungswelle)

$$\omega_1 = G(ct + x)$$

von rechts her gegen dieses freie Ende, so kann hier der Vorgang nicht unverändert weitergehen, auch nicht spurlos verschwinden. An der Stirnfläche kann offenbar eine Volumdilatation nicht bestehen, dazu würden Zug- oder Druckkräfte von links her nöthig sein. Da haben wir so einen Fall dauernden Verschwindens, es betrifft hier die Function ω. Das Gleiche würde nun auch eintreten, wenn die Substanz ohne Unterbrechung auch die linke Raumhälfte erfüllte und von dort her eine entgegengesetzt gleiche Verdichtungswelle

$$\omega_2 = -G(ct - x)$$

heranrückte. Diese beiden würden ungestört über die Stelle $x = 0$ hinweglaufen und sich bei der Superposition jederzeit vernichten. Damit haben wir einen Bewegungsvorgang gefunden, welcher in der rechten Hälfte einer allseitig unbegrenzten Masse ebenso verläuft, als endete die Masse an der Ebene $x = 0$, und grenzte dort an einen widerstandslosen leeren Raum. Man nennt die Entstehung der Welle ω_2 Reflection der anlaufenden Welle ω_1 an einem freien Ende. Verdünnung wird dabei als Verdichtung reflectirt, und ebenso umgekehrt. Die Volumdilatation ist bei dieser lediglich in der x-Richtung erfolgenden Bewegung vollständig gegeben durch $\omega = \frac{\partial \xi}{\partial x}$. Die longitudinalen Verrückungen ξ sind an der freien Grenzfläche unbehindert und werden durch die anlaufende und die reflectirte Welle in gleicher Richtung gefordert, nämlich positiv nach rechts, wenn eine wahre Verdünnung von rechts heranläuft und als Verdichtung zurückgeht, im umgekehrten Falle negativ. Die Verrückungen werden am freien Ende mit gleichem Vorzeichen reflectirt und verdoppeln sich dadurch an der Grenzfläche. Es läſst sich übrigens leicht zeigen, daſs für Wellen dieser Art ξ derselben Differentialgleichung wie ω entspricht. Zunächst wissen wir schon, daſs auch die früher eingeführte Hülfsfunction Ω derselben folgt. Nach Gleichung (138) ist aber im vorliegenden Falle, wo in den einzelnen Wellenebenen selbst nirgends verschiedene Zustände vorkommen sollen, also keine Differentialquotienten nach y oder z auftreten:

$$\xi = \frac{\partial \Omega}{\partial x}.$$

Die Differentialquotienten einer Lösung der Wellengleichung aber sind ebenfalls Lösungen, mithin ist auch ξ eine Lösung.

Könnte man experimentell statt der eben betrachteten freien Stirnfläche die Grenzbedingung herstellen, daſs dieses Ende absolut starr und unbeweglich gehalten wird, so würden wir statt der vorigen Grenzbedingung $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$ nun die Bedingung $(\xi)_{x=0} = 0$ zu erfüllen haben. Da nun aber ξ dieselbe Differentialgleichung befriedigt wie ω, so brauchen wir jetzt nur unsere gemachten Schlüsse zu übertragen. Die Reflection wird so erfolgen, daſs positive Verrückungen als negative zurücklaufen; Verdünnung wird dann als Verdünnung, Verdichtung als Verdichtung reflectirt. Diese Verhältnisse kann man namentlich bei Luftwellen beobachten, welche gegen feste Wände anlaufen.

Für die den Differentialgleichungen (148 a) entsprechenden wellenförmig fortgepflanzten Drehungen λ, μ, ν gelten ähnliche Grenzbedingungen beim Anlaufen an freie oder starre Stirnflächen. Ist in der Substanz rechts von der Stirnfläche eine gewisse zwischen zwei zur x-Axe normalen Ebenen enthaltene Schicht durch transversale Schiebungen etwa parallel der z-Axe deformirt, so herrschen dort einfache Scheerungen, welche, wie wir in § 13 zeigten, mit

Drehung um die unbetheiligte Axe, hier also die y-Axe, verbunden sind. Die Drehungswinkel μ bilden dann eine durch die Art der Schiebungen vorgeschriebene Function von x. Sobald die Kräfte, welche diesen Zustand herbeiführten, entfernt werden, ist das Gleichgewicht gestört, die Deformation läuft in Gestalt zweier Wellen auseinander, deren eine nach rechts hin sich entfernt in die dort unbegrenzt gedachte Substanz. Die andere aber läuft gegen das Ende $x = 0$. Sie ist eine ebene Welle der Drehung μ. Für sie gilt die mittlere der Differentialgleichungen (148 a). Der allgemeine Ausdruck $2\,\mu = \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ reducirt sich hier auf $2\,\mu = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}$, da in der Querrichtung z keine Differentialquotienten der Verrückungen auftreten und überdies keine ξ-Verrückungen vorhanden sind. Ist die Endfläche $x = 0$ frei, so kann dort keine Drehung der Theilchen bestehen, denn dazu würden tangentiale Schubkräfte von links her nöthig sein, also haben wir die Bedingung $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$. Ist aber diese Endfläche unbeweglich starr, so gilt die Bedingung $(\zeta)_{x=0} = 0$. Auch läſst sich zeigen, daſs für die transversale Verrückung ζ hierbei dieselbe Differentialgleichung gilt. Nach (138) wird nämlich, wenn x die einzige räumliche Variabele ist und Volumänderungen (Ω) ausgeschlossen sind:

$$\xi = 0\,, \quad \eta = \frac{\partial N}{\partial x}\,, \quad \zeta = -\frac{\partial M}{\partial x}\,.$$

Da nun für M und N dieselbe Wellengleichung gilt wie für μ und ν, so gilt sie in diesem Falle auch für η und ζ. Wir hatten speciell Schiebungen parallel z, also ζ-Verrückungen gewählt, für η-Verrückungen oder zusammengesetzte in schrägen Richtungen gelten dieselben Bedingungen. Formell stimmen sie bis auf die verschiedene Geschwindigkeit durchaus überein mit denen der longitudinalen Wellen. Am freien Ende werden die Drehungen mit umgekehrtem Vorzeichen reflectirt, die tangentialen Verrückungen η oder ζ mit gleichem Zeichen. An einem starren Ende werden die Drehungen mit gleichem, die Verrückungen mit entgegengesetztem Vorzeichen reflectirt.

Auch für ebene Torsionswellen um die x-Axe, welche in der x-Richtung fortschreiten, gelten dieselben Bedingungen; es ist nur nicht möglich, sich solche in seitlich unbegrenzter Substanz vorzustellen. Diese Unbegrenztheit ist aber bei Torsionen von Kreiscylindern auch gar nicht erforderlich. Sie erfordern keinerlei Kräfte auf die

Mantelfläche und deformiren auch die Mantelfläche nicht. Die Torsion ist, wie aus der dritten Zeile der Gleichungen (91), S. 157 abzulesen und dann ausführlich discutirt wurde, mit Drehungen der Theilchen um alle drei Axen verbunden, aber diese pflanzen sich mit gemeinschaftlicher Geschwindigkeit fort, so dafs das Bild der ebenen Wellenbewegung auch hier gewahrt erscheint. In einem Stabe, dessen eines Ende starr festgeklemmt ist, während das andere Ende frei ist, mufs eine Torsionswelle wegen der entgegengesetzten Art der Reflectionen an beiden Enden viermal durch die ganze Stablänge l laufen, bis der nämliche Bewegungsvorgang sich periodisch wiederholt. Die Zeit dieser Periode T kann man an dem durch die Torsionsschwingung erzeugten Tone recht genau erkennen, die Fortpflanzung erfolgt mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{K}{\mu'}}$, also ist

$$4l = \sqrt{\frac{K}{\mu'}} \cdot T. \tag{154}$$

Diese Gleichung kann zur Messung des Moduls K verwendet werden, da es leicht gelingt Torsionsschwingungen in cylindrischen Stäben durch drehendes Reiben der Mantelfläche mit feuchtem oder harzigem Tuche hervorzurufen. Die ebenen Scheerungswellen, welche wir vorher betrachteten, lassen sich in Stäben nicht erzeugen. Nicht zu verwechseln damit sind die gewöhnlichen Transversalschwingungen von Stäben, welche auf Biegungswellen beruhen und auch eine andere Geschwindigkeit besitzen.

Die für unbegrenzte Substanz betrachteten ebenen Volumdilatationswellen lassen sich in Stäben gleichfalls nicht erzeugen. Der dazu nöthige Typus der Deformation würde entsprechen der am Schlufs von § 39 unter Sonderfall 2 betrachteten Form. Dort ist in Gleichung (78) auch zu erkennen, dafs der longitudinale Stress X_x aus der Gröfse der durch $\sigma_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ vollständig angegebenen Volumdehnung gefunden wird durch Zusatz des zusammengesetzten Factors $-2K(1+\theta)$; denselben Factor finden wir auch in der Differentialgleichung für die ω-Welle; vergl. Gleichung (148). Erregt man aber in einem Stabe Longitudinalwellen, so werden diese zwar mit Volumänderungen verbunden sein, da aber die Mantelflächen des Stabes durch keinerlei Kräfte angegriffen werden (die R_n in Gleichung (78) fehlen), so wird der Typus der fortgepflanzten Deformation entsprechen dem in § 40 behandelten: An Stellen, wo Volumdehnung vorüberzieht, wird zugleich Quercontraction eintreten, an

Stellen der Verdichtung wird der Stab seitlich anschwellen. Bei dieser Form der Welle wird der Longitudinalstress X_x aus dem Longitudinalstrain $\sigma_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ gefunden nach Gleichung (82) durch Zusatz eines anderen zusammengesetzten Factors, dem wir in Gleichung (83) die kurze Bezeichnung E gegeben haben. Dieser bestimmt deshalb die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in Stäben; sie ist $c = \sqrt{\frac{E}{\mu'}}$.

Erzeugt man in einem einseitig festgeklemmten anderseitig frei endenden Stabe durch longitudinales Reiben mit feuchtem oder harzigem Tuche die Wellen, so ist ganz analog wie in Gleichung (154) die vierfache Länge des Stabes gleich der eben angeführten Geschwindigkeit mal der Schwingungsdauer des gehörten Tones. Darauf beruht die bereits in § 40 erwähnte Methode der Messung von E.

Am Schlufs dieser Betrachtungen wollen wir die relativen Gröfsen der verschiedenen Wellengeschwindigkeiten zusammenstellen. Am schnellsten laufen die in Stäben nicht erzeugbaren reinen ω-Wellen:

$$c_1 = \sqrt{\frac{2K(1+\theta)}{\mu'}}. \tag{155}$$

Dann kommen die Longitudinalwellen mit Quercontraction, welche nach Einsetzung des in Gleichung (83) gegebenen ausführlichen Werthes von E liefern:

$$c_2 = \sqrt{\frac{2K(1+3\theta)}{\mu'(1+2\theta)}}. \tag{155 a}$$

Am langsamsten laufen die Torsionswellen in Stäben und die transversalen Scheerungswellen in unbegrenzter Substanz; deren Geschwindigkeit ist:

$$c_3 = \sqrt{\frac{K}{\mu'}}. \tag{155 b}$$

Beziehen wir uns wieder, wie schon früher, um eine Anschauung zu gewinnen, auf den idealen Fall $\theta = \frac{1}{2}$, welchen Poisson für den allgemeinen ansprach, so erhalten wir die Proportion:

$$c_1 : c_2 : c_3 = \sqrt{2(1+\theta)} : \sqrt{\frac{2+6\theta}{1+2\theta}} : 1$$

$$= \sqrt{3} : \sqrt{\frac{5}{2}} : 1 = 1{,}73 : 1{,}58 : 1. \tag{155 c}$$

Indessen ist zu beachten, daſs diese Gröſsenverhältnisse nur rohe Annäherungen sind für die meisten Stoffe. Wäre z. B. für irgend eine Substanz $c_2 : c_3 = 1{,}5 : 1 = 3 : 2$, so würde der Longitudinalton eines daraus verfertigten Stabes die Oberquinte des Torsionstones sein; in obigem Beispiel, wo $1{,}58 : 1$ herauskommt, findet man fast eine kleine Sexte für dieses Tonintervall.

§ 56. Transformation von $\Delta\varphi$ zum Gebrauche räumlicher Polarcoordinaten.

Die ebenen Wellen in unbegrenzter Substanz, von deren Betrachtung wir im vorigen Paragraphen ausgingen, wird man in der Natur verhältniſsmäſsig selten erregen oder beobachten können. Mit Ausnahme der ebenen Wellen in cylindrischen Räumen, auf welche sich die gefundenen Bewegungsgesetze in einigen Fällen direct übertragen lassen, hat man es meistens mit Bewegungen zu thun, welche in einem beschränkten Gebiete erregt werden und von dort nach allen Richtungen hinauslaufen, und zwar in isotropen Medien wegen der gleichen Geschwindigkeit als Kugelwellen um das Erregungscentrum. Wir müssen dabei zurückgehen auf die allgemeine Form der Wellengleichung (149)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi .$$

Das $\Delta\varphi$ hatten wir bisher immer in Cartesischen Coordinaten dargestellt als Summe der zweiten Differentialquotienten von φ nach x, y, z. Für die analytische Darstellung von Kugelwellen sind aber diese Coordinaten nicht recht handlich. Man thut besser, räumliche Polarcoordinaten mit dem Erregungscentrum als Anfangspunkt einzuführen. Da nun die Operation Δ einen absoluten Sinn hat, indem ihr Werth eine bestimmte Art der räumlichen Vertheilung der Werthe φ in der Umgebung einer Stelle des Raumes ausdrückt, so muſs sich dieses Zeichen auch in anderen Coordinatensystemen ausdrücken lassen. Diese Transformation von $\Delta\varphi$ für räumliche Polarcoordinaten wollen wir nun ausführen. Wir werden zwar hier nur die Abhängigkeit der Function φ vom Radiusvector r brauchen, da indessen dieselbe Operation auch sonst häufig vorkommt, wollen wir die Rechnung vollständig durchführen und auch die Abhängigkeit vom Polarwinkel ϑ und vom Längenwinkel η berücksichtigen.

Am schnellsten kommt man zum Ziele, wenn man eine allgemeine, aus dem GREEN'schen Satze folgende Beziehung benützt. Setzt man in Gleichung (133a) auf S. 205 für die Hülfsfunction ψ eine Constante, z. B. die Zahl 1, so wird $\frac{\partial \psi}{\partial n} = \varDelta \psi = 0$ und man erhält:

$$\iint d s \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \iiint d x\, d y\, d z \cdot \varDelta \varphi = 0. \tag{156}$$

Als Integrationsbereich nehmen wir ein Volumelement in Polarcoordinaten, welches so klein ist, dafs die Veränderung von $\varDelta \varphi$ im Inneren zu vernachlässigen ist, so dafs $\varDelta \varphi$ als der feste Werth, der an der betrachteten Stelle herrscht, vor das Raumintegral als Factor gestellt werden darf. Solche Punkte, in denen $\varDelta \varphi$ unstetig oder unendlich wird, dürfen nicht im Inneren dieses Volumelementes liegen. Das übrig bleibende $\iiint d x\, d y\, d z$ ist der Rauminhalt des Volumelementes, welches begrenzt ist:

1. durch zwei Kugelschalen mit den Radien r und $r + d r$,

2. durch zwei Kegelmäntel um die Polaraxe mit den Oeffnungswinkeln ϑ und $\vartheta + d \vartheta$,

3. durch zwei Meridianebenen mit den Längenwinkeln η und $\eta + d \eta$.

Die Kanten dieses einem rechtwinkligen Parallelepiped unendlich nahe kommenden Körpers sind

1. $d r$ in radialer Richtung,

2. $r \cdot d \vartheta$ in Richtung der Parallelkreise,

3. $r \sin \vartheta \cdot d \eta$ in Richtung der Meridiankreise.

Der Rauminhalt ist daher gleich $r^2 \sin \vartheta \cdot d r \cdot d \vartheta \cdot d \eta$ und

$$\iiint \varDelta \varphi\, d x\, d y\, d z = \varDelta \varphi \cdot r^2 \sin \vartheta \cdot d r \cdot d \vartheta \cdot d \eta. \tag{157}$$

Die Hauptaufgabe ist nun die Berechnung des Oberflächenintegrales in Gleichung (156), wobei n immer die Richtung der ins Innere zeigenden Normale bedeutet. Die Veränderlichkeit von $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ auf jeder einzelnen der sechs rechteckigen Begrenzungsflächen dürfen wir dabei ebenfalls vernachlässigen.

1. An der Fläche, welche der Kugel vom Radius r angehört, geht n_1 in der Richtung der wachsenden r, es ist dort $\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$.

Die Gröfse dieser Fläche ist $ds_1 = r^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\eta$. Also ist der Antheil zum Oberflächenintegral

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot r^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\eta\,.$$

An der gegenüberliegenden Fläche geht die Normale in der Richtung der abnehmenden r, also ist dort $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, ferner ist der ganze vorstehende Ausdruck durch den Schritt dr etwas verändert. Vereinigt man die Antheile dieser beiden Gegenflächen, so hebt sich der gröfste Theil, nämlich der ganze vorstehende Ausdruck, weg und es bleibt nur übrig die kleine Differenz, das Differential des vorstehenden Betrages für den Schritt dr und zwar mit negativem Vorzeichen, wegen der an der Gegenfläche bestehenden Richtung der inneren Normalen. Das liefert den Beitrag

$$-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} r^2 + 2\frac{\partial\varphi}{\partial r} r\right) \sin\vartheta\, d\vartheta \cdot d\eta \cdot dr\,. \tag{157_1}$$

2. An der Kegelfläche mit dem Oeffnungswinkel ϑ geht n_2 in der Richtung der wachsenden ϑ, es ist dort $dn_2 = r\,d\vartheta$, also $\frac{\partial\varphi}{\partial n_2} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}$. Die Gröfse dieser Fläche ist: $ds_2 = r\sin\vartheta \cdot d\eta \cdot dr$. Also ist der Beitrag zum Oberflächenintegral:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} \cdot r\sin\vartheta \cdot d\eta \cdot dr\,.$$

Der Factor r im Nenner und Zähler hebt sich. An der gegenüberliegenden Kegelfläche ist der Beitrag wegen der entgegengesetzten Normale mit einem Minuszeichen zu versehen und um das Differential, welches dem Schritt $d\vartheta$ entspricht, zu verändern; bei der Vereinigung beider bleibt nur das negativ genommene Differential nach ϑ vom vorstehenden Ausdruck übrig:

$$-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2}\sin\vartheta + \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\cos\vartheta\right) \cdot d\eta \cdot dr \cdot d\vartheta\,. \tag{157_2}$$

3. An der Meridianfläche mit dem Längenwinkel η geht n_3 in Richtung der wachsenden η, es ist dort: $dn_3 = r\sin\vartheta \cdot d\eta$, also $\frac{\partial\varphi}{\partial n_3} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$. Die Gröfse der Fläche ist $ds_3 = r\,d\vartheta \cdot dr$. Also ist der Beitrag zum Oberflächenintegral

$$\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cdot r \, d \vartheta \cdot d r.$$

Auch hier hebt sich r in Nenner und Zähler.

Vereinigt man damit den Beitrag von der gegenüberliegenden letzten Begrenzungsfläche, so bleibt das negative Differential nach η von vorstehendem Ausdruck

$$-\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} d \vartheta \cdot d r \cdot d \eta. \tag{157$_3$}$$

Die Summe der drei Ausdrücke (157_1, $_2$, $_3$) giebt das vollständige Oberflächenintegral, der Ausdruck (157) giebt das Raumintegral; die Summe aller vier Ausdrücke ist mithin nach Gleichung (156) gleich Null. Die drei Differentiale $d r \cdot d \vartheta \cdot d \eta$ heben sich weg. Dividirt man noch durch $r^2 \cdot \sin \vartheta$ und schafft die drei vom Flächenintegral herrührenden Summanden mit umgekehrtem Vorzeichen auf die rechte Seite, so findet man unmittelbar die Schlufsgleichung:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} \\ + \frac{1}{r^2} \cot \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}. \end{aligned}\right\} \tag{158}$$

Dies ist der ziemlich verwickelte Ausdruck, welchen die Operation $\varDelta$ für Polarcoordinaten annimmt. Man kann ihn zwar noch nach den Regeln der Differentialrechnung in etwas andere Form bringen, wobei namentlich die Einführung der Variabelen $\cos \vartheta$ an Stelle von ϑ nützlich ist, wesentlich vereinfacht wird er indessen dadurch auch nicht. Beschränken wir uns nun auf Functionen φ, welche nur vom Radiusvector r, nicht aber von den beiden Winkelgröfsen abhängen, welche also auf jeder um den Nullpunkt gelegten Kugelfläche ringsherum den gleichen Werth besitzen, so vereinfacht sich der vorstehende Ausdruck bedeutend. Man erhält dann:

$$\varDelta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \tag{158a}$$

Wenn man sich von vornherein auf eine Function beschränkt, welche nur von r abhängt, so kann man die vorstehende Gleichung (158a) auf kürzerem Wege gewinnen. Dann ist nämlich:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d \varphi}{d r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \varphi}{d r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{d \varphi}{d r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

Addirt man hierzu die analog gebildeten Ausdrücke für $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$, und bedient sich des für cartesische Coordinaten definirten Zeichens Δ, so kommt

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \left\{ \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 \right\} + \frac{d \varphi}{d r} \cdot \Delta r.$$

Die geschweifte Klammer hat den Werth 1 als Summe von drei Richtungscosinus-Quadraten, das Δr ist nach Gleichung (144) auf Seite 217 gleich $\frac{2}{r}$, also folgt direct hieraus die Gleichung (158a).

Diese Schlufsgleichung wollen wir nun noch etwas vereinfachen. Differenzirt man das Product $r \cdot \varphi$ zweimal nach r, so ergiebt sich nämlich:

$$\frac{\partial (r \varphi)}{\partial r} = r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \varphi$$

$$\frac{\partial^2 (r \varphi)}{\partial r^2} = r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Dieser Ausdruck stimmt, wenn man ihn durch r dividirt, mit unserem $\Delta \varphi$ überein, es ergiebt sich also für eine reine Function von r der einfache Ausdruck

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (r \varphi)}{\partial r^2}. \tag{158b}$$

Nebenbei kann φ auch noch Function der Zeit sein. Mit den zeitlichen Aenderungen hat die Operation Δ nichts zu thun.

§ 57. Kugelwellen.

Nachdem diese Umformung von $\Delta \varphi$ ausgeführt ist, kann man nun leicht die allgemeine Lösung der Wellengleichung, welche kugelförmigen Wellen um ein festes Centrum entsprechen, auffinden. Fordert man einen Bewegungsvorgang, bei welchem φ allein abhängt von r und t, so lautet die Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}. \tag{159}$$

Da r als die von der Zeit t unabhängige räumliche Variabele anzusehen ist, kann man r auch links in dem nach der Zeit genommenen Differentialquotienten dem φ als Factor beigeben. Dann fällt es rechts im Nenner fort und man erhält:

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}. \tag{159a}$$

Rein mathematisch betrachtet ist diese Differentialgleichung identisch mit derjenigen für ebene Wellen, Gleichung (151), nur ist die dort mit x bezeichnete Variabele hier r genannt und die gesuchte Function ist hier $r \cdot \varphi$. Man kann also das Schema der vollständigen Lösung aus Gleichung (153) direct hierher übertragen und findet:

$$r\varphi = F(r - ct) + G(r + ct)$$

oder

$$\varphi = \frac{F(r - ct) + G(r + ct)}{r}. \tag{160}$$

Der erste Theil $\frac{1}{r} F(r - ct)$ stellt eine Kugelwelle dar, welche vom Centrum auslaufend mit constanter Geschwindigkeit c sich über immer gröfser werdende Kugelschalen verbreitet und dabei wegen des Factors $\frac{1}{r}$ an Intensität abnimmt. Der zweite Theil $\frac{1}{r} G(r + ct)$ stellt eine gegen das Centrum einlaufende Kugelwelle dar, deren Intensität mit abnehmendem Radius immer gröfser wird. Im Kugelcentrum selbst zeigt der Ausdruck wegen der im Nenner auftretenden Null eine Discontinuität; an diesem Punkt ist die Lösung im Allgemeinen nicht zu brauchen, diese Stelle mufs ausgeschlossen werden; die Lösung giebt auch im Allgemeinen nicht an, was in solchen Centren für ein physikalischer Vorgang sich abspielt. Wenn eine Welle von einem Punkte kugelförmig ausläuft, so hat man im Centrum eine Ursache der Erregung zu suchen, aber mit wirklich ausdehnungslosen Erregungspunkten hat man es in der Natur niemals zu thun. Wird beispielsweise in Luft eine Verdichtungswelle erzeugt durch die Explosion eines Körnchens Schiefspulver, so hat man allerdings ein winzig kleines Erregungsgebiet, denn das Volumen des festen Körnchens ist fast verschwindend gegenüber dem Volumen der daraus entwickelten Gase, aber eine gewisse Ausdehnung besitzt es doch. Die Vorgänge in diesem kleinen Raum werden durch unser Kugelwellen-Integral nicht dargestellt. Denkt man aber das Körnchen von einer kleinen Kugelfläche umschlossen, welcher durch die Explosion eine gewaltsame Volumenvergröſserung ertheilt wird, so kann man diese Vorschiebung der Kugeloberfläche nach auſsen als die gegebene Ursache der Wellenerregung ansehen, ohne auf die Vorgänge im Inneren der Kugel einzugehen. Dann stimmt auch der Verlauf im äuſseren Raume mit unserer Darstellung überein. Ganz analog ist es mit der Erregung transversaler drehender Kugelwellen in festen Körpern. Diese kann man erzeugt denken dadurch, daſs einer um das Erregungscentrum gelegten kleinen Kugel zwangsweise eine Drehung ertheilt wird, die sich dann nach auſsen fortpflanzt. Dadurch wird wieder die Stelle der Discontinuität unserer Lösung aus der Betrachtung herausgeschnitten.

Noch auf einen Umstand sei hingewiesen: Die Herleitung aller hier benützten elastischen Gesetze war von Anfang an beschränkt worden auf kleine Deformationen; die ω, λ, μ, ν müssen kleine Brüche sein, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden dürfen. Für endliche Werthe hat man verwickeltere Gesetze zu erwarten, namentlich werden die für die Elasticität der isotropen Körper charakteristischen Gröſsen K und θ, und damit auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen inconstant. Erfahrungsgemäſs wachsen letztere bei starker Vergröſserung der Verrückungen. Nun liegt herum um das Centrum, wo unsere Lösung $\varphi = \infty$ ergiebt, zunächst ein Gebiet, in welchem φ alle endlichen Werthe durchläuft. Dieses Gebiet ist ebenfalls noch aus der Betrachtung auszuscheiden. Bei sehr heftig wirkenden Erregungscentren darf man daher die umschlieſsenden Kugeln nicht zu klein wählen.

In einem Falle können wir unsere Lösung (160) auch auf das Centrum selbst ausdehnen, wenn nämlich dort kein Erregungscentrum liegt, sondern eine einlaufende Kugelwelle an diesem Centrum gewissermaſsen reflectirt wird. Die nothwendige Bedingung dabei besteht darin, daſs φ im Centrum endlich bleibe. Dies ist nur möglich, wenn der Zähler des Ausdruckes φ in (160) für $r = 0$ zu allen Zeiten gleich Null ist. Dann erhält man dort zwar den unbestimmten Betrag $\frac{0}{0}$, da aber die Discontinuität dann vermieden ist, kann man durch einen Grenzübergang den Werth finden. Wir müssen setzen:

$$F(-ct) + G(+ct) = 0$$

für alle Zeiten. Dadurch wird zwischen den sonst unabhängigen

Functionen $F(s)$ und $G(s)$ die Beziehung gefordert: $F(-s) + G(s) = 0$ oder:

$$F(s) = -G(-s).$$

Die Lösung nimmt dadurch die Gestalt an:

$$\varphi = \frac{G(ct + r) - G(ct - r)}{r}. \tag{161}$$

Die einlaufende Welle $\frac{1}{r} G(ct + r)$ erzeugt eine wieder auslaufende Welle $-\frac{1}{r} G(ct - r)$. Das Minuszeichen der letzteren zeigt an, daſs eine einlaufende Verdichtung als Verdünnung zurückgeht, analog wie bei der Reflexion ebener Wellen an einer freien Endfläche. Man vergleiche die dahin gehörige Lösung (153 a).

Auch die Art der Reflection von auslaufenden Kugelwellen an ebenen Grenzflächen läſst sich ohne weitere Rechnung leicht übersehen. Man braucht nur das elastische Medium jenseits dieser Grenzfläche continuirlich fortgesetzt zu denken, und dort ein zweites (virtuelles) Centrum anzunehmen, welches wie das Spiegelbild des reellen Centrums symmetrisch mit diesem zur Grenzebene liegt. Von diesem zweiten Centrum denkt man synchron ein ebensolches System von Kugelwellen ausgehend, welches sich in dem reellen Theile des Mediums mit dem ersten Wellenzug superponirt in der Weise, daſs an allen Punkten der Grenzebene zu jeder Zeit die Werthe von φ sich, je nach dem Vorzeichen der zweiten Welle, entweder vernichten oder verdoppeln. Diese beiden Möglichkeiten entsprechen einer freien und einer starr festgehaltenen Grenze. Haben wir beispielsweise eine anlaufende Verdichtungswelle, so muſs man bei freier Grenzfläche von dem virtuellen Centrum eine Verdünnungswelle aussenden, damit an der Grenze $\omega = 0$ bleibt. Bei einer starren Grenze aber muſs man von dort ebenfalls Verdichtung aussenden, dann werden von den Verrückungen wenigstens die normal zur Grenzebene gerichteten Componenten dort überall und allzeit gleich Null bleiben.

§ 58. Longitudinale Kugelwellen.

Wir sahen aus den ursprünglichen Wellengleichungen (148) und (148 a), daſs den Volumwellen eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit eigen ist, als den Drehungswellen. Ist nun in einem Erregungscentrum eine Ruhestörung erzeugt, welche sowohl Volumveränderungen wie auch Drehungen hervorruft, die aber nach allen Richtungen gleiche Werthe haben, so dafs die auslaufende Bewegung nur von r und t abhängt, so hat man nach der Theorie zu erwarten, dafs die fortgepflanzten Verrückungen sich trennen werden in zwei Wellen. Die schneller laufende wird die Volumveränderungen ω ohne Drehung der Theilchen fortführen, eine langsamere, welche Drehungen ohne Dilatation fortpflanzt, wird später folgen, so dafs bei kurzer Dauer der Erregung beide Wellen getrennt und unabhängig von einander verlaufen müssen. Bei der Volumwelle haben wir hier in den kleinsten Volumelementen thatsächlich die Deformation realisirt anzunehmen, welche am Schlusse von § 39 (S. 147, Fall 2) betrachtet wurde. Die Quercontraction, welche bei ebenen Longitudinalwellen in Stäben die Längsdehnung begleitet, kann hier bei den geschlossenen Kugelschichten nicht eintreten, ohne die Masse zu zerreifsen. Darum wird auch hier für die Longitudinalwellen die Geschwindigkeit c_1 [Gleichung (155)] und nicht c_2 [Gleichung (155 a)] anzunehmen sein.

Wir wollen nun auch die Betrachtung dieser beiden Arten von Wellen trennen und dabei auf die Verrückungen der Massenpunkte zurückgehen.

In § 53 ist gezeigt, dafs die vier Hülfsfunctionen $\Omega\, \Lambda\, M\, N$ die Brücke von den $\omega\, \lambda\, \mu\, \nu$ zu den $\xi\, \eta\, \zeta$ bilden. Am Schlusse von § 54 wurde auch gezeigt, dafs man die Hülfsfunctionen, die griechischen Majuskeln, denselben Wellengleichungen zu unterwerfen hat wie die Minuskeln. Wir beginnen mit den Volumwellen ohne Drehungen. Die Hülfsfunction Ω ist nur von r und t abhängig, und genügt der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \cdot \Omega)}{\partial r^2}. \tag{162}$$

Wählen wir eine vom Centrum auslaufende Welle, so haben wir das Integral

$$\Omega = \frac{1}{r} F(r - c_1 t). \tag{162 a}$$

Die Vectorpotentiale sind beliebigen Constanten gleichzusetzen, ihre Differentialquotienten jedenfalls gleich Null. Es folgt dann aus den Gleichungen (138)

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{d\Omega}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \left(\frac{1}{r} F' - \frac{1}{r^2} F\right) \cdot \frac{x}{r} \\
\eta &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{d\Omega}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \left(\frac{1}{r} F' - \frac{1}{r^2} F\right) \cdot \frac{y}{r} \\
\zeta &= \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{d\Omega}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = \left(\frac{1}{r} F' - \frac{1}{r^2} F\right) \cdot \frac{z}{r}.
\end{aligned}\right\} \qquad (162\,\text{b})$$

Unter F' ist die Ableitung der Function $F(s)$ nach ihrem Argument s zu verstehen; die Angabe der Variabelen, welche immer $(r - c_1 t)$ lautet, ist hinter den Zeichen F und F' hier und im Folgenden hinzuzudenken. Man erkennt aus den vorstehenden Ausdrücken, dafs überall die Proportion gilt:

$$\xi : \eta : \zeta = x : y : z,$$

dafs also die Verrückungen der Massenpunkte in radialer Richtung erfolgen. Die resultirende Verrückung ϱ ist

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \frac{1}{r} F' - \frac{1}{r^2} F. \qquad (162\,\text{c})$$

Das Vorzeichen kann nicht zweifelhaft sein, da die Componenten ξ, η, ζ eindeutig angegeben sind.

Wir haben hier eine rein longitudinale Wellenbewegung. Die damit verbundene Volumdilatation ω könnte man nach der oft angeführten Formel aus ξ, η, ζ durch Differentiation und Addition berechnen. Schneller zum Ziele führt die Gleichung (139), welche in diesem Falle lautet:

$$\omega = \Delta \Omega = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\,\Omega)}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \cdot F''. \qquad (162\,\text{d})$$

F'' ist der zweite Differentialquotient von F nach dem Argument s, als Variabele ist wieder $(r - c_1 t)$ zu setzen.

Die durch Longitudinalverrückungen fortgepflanzte Wellenbewegung giebt keinen reinen Volumstrain, denn ein im Ruhezustand kugelförmiges Massenelement wird beim Passiren einer Verdichtung resp. Verdünnung in ein abgeplattetes resp. zugespitztes Rotationsellipsoid mit radial gerichteter Axe verwandelt. Deshalb wird in festen Körpern auch der Stress in radialer Richtung einen Hauptdruck besitzen, welcher von den auf dem Radius senkrechten Drucken verschieden ist. Die Gleichungen (78) geben die Werthe des radialen und peripheren Druckes an. Nun können aber diese longitudinalen

Wellen auch in Flüssigkeiten und Gasen erregt werden, ja, sie sind der einzige in diesen Medien mögliche Wellentypus. Ihnen allein hat man die Fortpflanzung des Schalles in Wasser und Luft zuzuschreiben. In diesen Medien, welche keinen Widerstand gegen Schiebungen der Schichten äufsern, mufs der Stress sich auf einen nach allen Richtungen gleichmäfsig ausgeübten Druck reduciren. Wenn man die elastischen Constanten K und θ benutzt, tritt beim Uebergange zu Flüssigkeiten die Schwierigkeit ein, dafs man zwar $K = 0$, aber $K \cdot \theta$ endlich setzen mufs. Benutzt man dagegen die Moduln H und K, so bleibt H unberührt, nur K wird gleich Null. Die Gleichungen (78) geben dann auch, wenn man bedenkt, dafs die dort benützte Hauptdilatation σ_1 die ganze Volumdehnung ω anzeigt, sowohl für das radiale X_x wie für das periphere R_n den gemeinsamen Werth des Stress:

$$P = -H\omega = -2K\theta\,\omega. \tag{163}$$

Diesen Werth kann man mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c_1, welche aus Gleichung (148) abgelesen oder aus Gleichung (155) direct entnommen werden kann, combiniren. Benützt man den Ausdruck für θ in der Tabelle (87), Seite 153, so findet man:

$$c_1^2 = \frac{2K(1+\theta)}{\mu'} = \frac{H}{\mu'} + \tfrac{4}{3}\frac{K}{\mu'}. \tag{164}$$

In Flüssigkeiten und Gasen, für welche $K = 0$ ist, gilt daher

$$c_1^2 = \frac{H}{\mu'}. \tag{164a}$$

Ersetzt man hier den Modul H durch den aus Gleichung (163) folgenden Ausdruck $-\frac{P}{\omega}$, so wird:

$$c_1^2 = -\frac{P}{\mu' \cdot \omega}. \tag{164b}$$

Nach der Definition ist ω der Quotient der Volumzunahme durch das Volumen. Man kann aber denselben Begriff auch durch die mit der Volumdehnung verbundene Abnahme der Massendichtigkeit darstellen als Quotient der Dichtigkeitsabnahme $(-d\mu')$ durch die Dichtigkeit μ'. Es ist also

$$\omega = -\frac{d\mu'}{\mu'}. \tag{165}$$

P ist der Druck, welcher die Verdichtung erzeugt. Steht nun die elastische Flüssigkeit auch im Ruhezustand ohne Wellenbewegung unter einem constanten gleichmäſsig vertheilten Drucke, den wir p nennen, so wird sich der mit der Welle zusammenhängende Druck P als eine Schwankung des Gesammtdruckes geltend machen, welche wir mit dp bezeichnen können. Die Gleichung (164b) nimmt dann unter Benützung von (165) folgende einfache Gestalt an:

$$c_1^2 = \frac{dp}{d\mu'}. \tag{165a}$$

Das Quadrat der Wellengeschwindigkeit ist gleich der zu einer kleinen Verdichtung nöthigen Drucksteigerung dividirt durch den Betrag dieser Verdichtung. Diese Darstellung ist namentlich wichtig für die Schallgeschwindigkeit in Gasen, welche ja immer unter Druck stehen müssen.

§ 59. Transversale Kugelwellen.

Transversale Wellen, zu deren Angabe man mit Functionen von r und t allein auskommt, ohne auf den Polarwinkel und den Längenwinkel und die dadurch gebildeten sogenannten Kugelfunctionen eingehen zu müssen, können nur Wellen sein, welche λ, μ, ν fortpflanzen.

Da wir die Verrückungen selbst finden wollen, gehen wir direct von den Vectorpotentialen aus (das Ω setzen wir constant oder Null) und machen die einfachste Annahme, daſs nur die eine Componente Λ als Function von r und t auftritt, während

$$M = N = 0 \tag{166}$$

ist. Dieser Ansatz ist aber unverträglich mit der früher als erfüllt angenommenen Nebenbedingung Gleichung (140). Wir dürfen daher nicht die drei Gleichungen (141) für λ, μ, ν gebrauchen, sondern müssen stehen bleiben bei (139a, b, c). Diese lauten beim Verschwinden von M und N:

$$\left.\begin{aligned}
2\lambda &= \Delta\Lambda - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} \\
2\mu &= -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y \cdot \partial x} \\
2\nu &= -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z \cdot \partial x}.
\end{aligned}\right\} \tag{166a}$$

Der Gedankengang, welcher in § 54 zu dem Resultate (150c) führte, dafs man nämlich die Hülfsfunctionen derselben Wellengleichung unterwerfen kann, wird daher hier nicht ohne Weiteres passen, jedoch findet man auch hier dieselben Verhältnisse. Zunächst genügen also 2λ, 2μ, 2ν der Wellengleichung mit c_3, und wir wollen die Ausdrücke (166a) in diese einsetzen. Dabei wollen wir die Operation, welche, an $\varLambda$ in der ersten Zeile ausgeführt, zu 2λ führt, durch das Symbol

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] \tag{166 b}$$

bezeichnen. Es ist dann:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varLambda &= c_3{}^2 \cdot \varDelta\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varLambda \\
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\frac{\partial^2 \varLambda}{\partial y\,\partial x}\right) &= c_3{}^2 \cdot \varDelta\left(-\frac{\partial^2 \varLambda}{\partial y\,\partial x}\right) \\
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\frac{\partial^2 \varLambda}{\partial z\,\partial x}\right) &= c_3{}^2 \cdot \varDelta\left(-\frac{\partial^2 \varLambda}{\partial z\,\partial x}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{166 c}$$

Hier sind links und rechts überall mehrere Differenzirungen an $\varLambda$ vorgeschrieben, deren Reihenfolge man vertauschen darf, wenn $\varLambda$ und seine Differentialquotienten räumlich und zeitig stetig verlaufen, was angenommen werden soll. Diese Vertauschung liefert folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\frac{\partial^2 \varLambda}{\partial t^2} &= \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right](c_3{}^2 \varDelta \varLambda) \\
-\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\frac{\partial^2 \varLambda}{\partial t^2} &= \quad -\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}(c_3{}^2 \varDelta \varLambda) \\
-\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x}\frac{\partial^2 \varLambda}{\partial t^2} &= \quad -\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x}(c_3{}^2 \varDelta \varLambda).
\end{aligned}\right\} \tag{166 d}$$

Hier wird in jeder der drei Gleichungen links und rechts dieselbe Operation gefordert. Die Bedingungen sind sicher erfüllt, wenn die Gröfsen, an denen so operirt werden soll, selbst einander gleich sind. Diese sind nun, wie man sieht, auf der linken Seite $\frac{\partial^2 \varLambda}{\partial t^2}$, auf der rechten $c_3{}^2 \varDelta \varLambda$. Also darf man $\varLambda$ derselben Wellengleichung unterwerfen.

Wir wollen eine auslaufende Kugelwelle annehmen und setzen demgemäſs

$$A = \frac{1}{r} F(r - c_3 t) \tag{167}$$

$$\Omega = M = N = 0 .$$

Die Gleichungen (138) liefern in diesem Falle

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 0 \\ \eta &= -\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{d A}{d r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = -\left(\frac{1}{r} F' - \frac{1}{r^2} F\right) \cdot \frac{z}{r} \\ \zeta &= +\frac{\partial A}{\partial y} = +\frac{d A}{d r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = +\left(\frac{1}{r} F' - \frac{1}{r^2} F\right) \cdot \frac{y}{r} . \end{aligned}\right\} \tag{167 a}$$

F' ist die erste Ableitung der Function F; das Argument $(r - c_3 t)$ ist hinzuzudenken.

Aus diesen Ausdrücken kann man folgende Proportion herauslesen:

$$\xi : \eta : \zeta = 0 : -z : y . \tag{167 b}$$

Sie zeigt an, daſs die Verrückung jedes Punktes als Drehung auf einem Parallelkreise um die x-Axe erfolgt. Aus Fig. 8 auf Seite 155 erkennt man auch, daſs zu einer positiven Drehung im ersten Quadranten ein negatives η und positives ζ gehört. Unsere Gleichungen (167 a) stellen also positiv gedrehte Theilchen dar an den Orten und zu den Zeiten, wo $\left(\frac{1}{r} F' - \frac{1}{r^2} F\right)$ selbst positiv ist. Die resultirende Verrückung ϱ auf dem Kreisbogen ist

$$\varrho = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2} = \left(\frac{1}{r} F' - \frac{1}{r^2} F\right) \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r} . \tag{168}$$

Die in diesem Ausdruck auftretende $\sqrt{y^2 + z^2}$ ist der Abstand des Massenpunktes von der x-Axe, also der Radius des Parallelkreises. Bezeichnet man den Polarwinkel des Strahles r gegen die x-Axe mit ϑ, so ist

$$\frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r} = \sin \vartheta ,$$

was man oben in ϱ einsetzen kann:

$$\varrho = \left(\frac{1}{r} F' - \frac{1}{r^2} F\right) \cdot \sin \vartheta . \tag{168 a}$$

Aus dem Linearwerth der Verrückung ϱ und dem Radius des Kreises findet man den Winkel τ der Drehung um die x-Axe:

$$\tau = \frac{\varrho}{\sqrt{y^2 + z^2}},$$

also nach Gleichung (168):

$$\tau = \frac{1}{r^2} F' - \frac{1}{r^3} F. \tag{168 b}$$

Man sieht, dafs dieser Betrag von den einzelnen Coordinaten x, y, z des Massenpunktes unabhängig ist und nur vom Kugelradius r und der in den Functionsargumenten steckenden Zeit t bestimmt wird. Also alle Massenpunkte, welche auf einer und derselben Kugelfläche um das Centrum liegen, erscheinen zu jeder Zeit um den gleichen Winkel abgelenkt. Eine relative Lagenänderung zwischen den Massenpunkten derselben Kugelfläche wird dadurch nicht erzeugt. Die Verrückung geschieht wie die Drehung einer starren Kugelschale Damit hat man ein anschauliches Bild des Bewegungsvorganges gefunden. Man denke sich das elastische Medium zerschnitten in unendlich dünne concentrische Kugelschalen. Dann besteht die Bewegung darin, dafs eine gewisse vorgeschriebene Anordnung der Drehungen dieser Kugelschalen um die x-Axe sich mit constanter Geschwindigkeit c_3 fortpflanzt, immer gröfsere Kugelschalen ergreifend und in ähnlichem zeitlichen Verlaufe drehend. Wegen der Factoren $\frac{1}{r^2}$ und $\frac{1}{r^3}$ werden aber die Beträge der Drehungswinkel τ bei gröfseren Kugelschalen abnehmen. Das Glied mit r^3 im Nenner wird zuerst unmerklich werden. Man kann also sagen, in grofsen Entfernungen vom Centrum werden die Ablenkungswinkel mit dem reciproken Quadrat des Radius abnehmen. Die linearen Verrückungen ϱ aber nehmen, wie (168a) zeigt, in grofser Entfernung umgekehrt der ersten Potenz des Radius ab.

Diese Eintheilung des Körpers in starre Kugelschichten erinnert ganz an die Veranschaulichung der einfachen Scheerung oder Schiebung durch einen Stofs von über einander gelegten Papierblättern. Die wahren Deformationen in den kleinsten Theilchen sind auch hier Scheerungen, ähnlich wie bei der Torsion. Es ist interessant, aus den Formeln zu erkennen, dafs der Ablenkungswinkel τ durchaus nicht die Drehung der kleinsten Theilchen angiebt, sondern dafs diese durch die Scheerungen verändert werden. Wir fragen deshalb nach den Ausdrücken für λ, μ, ν. Wir könnten diese aus den gefundenen ξ, η, ζ nach den oft benützten Formeln (10a′) berechnen. Kürzer führen zum selben Ziele die Gleichungen (166a) mit Hinsicht auf (167). Die vorkommenden Glieder müssen wir einzeln berechnen. Es ist

$$\Delta A = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r A)}{\partial r^2} = \frac{1}{r} F''.$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}F' - \frac{x}{r^3}F\right) = \frac{x^2}{r^3}F' + \left(\frac{1}{r} - 3\frac{x^2}{r^3}\right)\cdot\left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^2}F' - \frac{x}{r^3}F\right) = \frac{x \cdot y}{r^3}F'' - 3\frac{x\,y}{r^3}\left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z \cdot \partial x} = \frac{x\,z}{r^3}F'' - 3\frac{x\,z}{r^3}\left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right)$$

folglich:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)F'' - \left(\frac{1}{r} - 3\frac{x^2}{r^3}\right)\cdot\left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right)\right\}\\
\mu &= \frac{1}{2}\frac{x\,y}{r^3}\left\{-F'' + 3\left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right)\right\}\\
\nu &= \frac{1}{2}\frac{x\,z}{r^3}\left\{-F'' + 3\left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right)\right\}.
\end{aligned}\right\}\tag{169}$$

Während also die Kugelschichten nur um die x-Axe gedreht werden, zeigen die kleinsten Theilchen Drehungen um alle drei Axenrichtungen.

Nach dem Princip der ungestörten Superposition kann man dieser einen transversalen Kugelwelle eine zweite superponiren, welche aus dem Ansatz

$$A = 0, \quad M = \frac{1}{r} G(r - c_3 t), \quad N = 0 \tag{170}$$

entspricht, und eine dritte, welche dem Ansatz

$$A = M = 0, \quad N = \frac{1}{r} J(r - c_3 t) \tag{170a}$$

entspricht. $G(s)$ und $J(s)$ sind beliebige Functionen. Diese pflanzen sich alle drei mit gemeinsamer Geschwindigkeit fort und erzeugen eine complicirte Art von transversaler Wellenbewegung. Endlich kann man mehrere Wellencentra annehmen, entweder in discreten Punkten oder auch angeordnet in continuirlicher Folge auf Curven, Flächen oder in Raumgebieten. Auf diese Weise kann man eine grofse Mannigfaltigkeit verschiedener Wellenbewegungen darstellen.